Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Vektoren

Aufgabe: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne die Beträge der Vektoren und die Skalarprodukte zwischen den verschiedenen Vektoren.

Lösung: I. Für Vektoren des dreidimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt: $\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ist der <u>Betrag</u> (Länge) des Vektors $\vec{a}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ heißt das <u>Skalarprodukt</u> der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es gilt noch: $\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \vec{a}^2$, d.h. das Quadrat des Betrags eines Vektors stimmt mit dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst überein.

II. Wir berechnen die <u>Beträge</u> der Vektoren:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

III. Als <u>Skalarprodukte</u> zwischen den verschiedenen Vektoren erhalten wir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1261