Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Vektorräume

Aufgabe: Zeige: Die Menge V mit V = $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 - x_2 - x_3 = 0 \wedge -20x_1 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^3$ ist mit der üblichen Vektoraddition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen **R**.

Lösung: I. Ein Tripel (V, +, ·) aus Menge und Verknüpfungen heißt K-<u>Vektorraum</u> über dem Körper (K, +, ·), wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

A) (V, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) V ist eine Menge von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$, $c^{->}$, ... εV.
b) +: V × V -> V ist die Verknüpfung „Addition" von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$εV mit: +: ($a^{->}$, $b^{->}$) -> $a^{->}$+$b^{->}$εV.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: ($a^{->}$+$b^{->}$)+$c^{->}$ = $a^{->}$+($b^{->}$+$c^{->}$) für alle $a^{->}$, $b^{->}$, $c^{->}$εV.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element $0^{->}$εV mit: $0^{->}$+$a^{->}$ = $a^{->}$+$0^{->}$ = $a^{->}$ für alle $a^{->}$εV.
e) Für alle $a^{->}$εV gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -$a^{->}$εV mit: $a^{->}$+(-$a^{->}$) = (-$a^{->}$)+$a^{->}$ = $0^{->}$ mit neutralem Element $0^{->}$.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: $a^{->}$+$b^{->}$ = $b^{->}$+$a^{->}$ für alle $a^{->}$, $b^{->}$εV.

B) (V, ·) erfüllt:
g) ·: K × V -> V ist die Verknüpfung „skalare Multiplikation" für kεK, $a^{->}$εV mit: ·: (k, $a^{->}$) -> k$a^{->}$εV.
h) Die Verknüpfung · ist assoziativ: (kl)·$a^{->}$ = k(l$a^{->}$) für alle k, lεK, $a^{->}$εV.
i) Mit dem neutralen Element 1εK gilt: 1·$a^{->}$ = $a^{->}$ für alle $a^{->}$εV.

C) Es gelten die Distributivgesetze:
j) (k+l)·$a^{->}$ = k$a^{->}$ + l$a^{->}$ für alle k,l εK, $a^{->}$εV.
k) k·($a^{->}$+$b^{->}$) = k$a^{->}$ + k$b^{->}$ für alle kεK, $a^{->}$, $b^{->}$εV.

D) Für den Körper (K, +, ·) gilt: (K, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
l) K ist eine Menge mit Elementen k, l, m, ... εK.
m) + ist die Verknüpfung „Addition" von Elementen k, l εK mit: +: (k, l) -> k+l εK.
n) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (k+l)+m = k+(l+m) für alle k, l, mεK.
o) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εK mit: 0+k = k+0 = k für alle kεK.
p) Für alle kεK gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -kεK mit: k+(-k) = (-k)+k = 0 mit neutralem Element 0.
q) Die Verknüpfung + ist kommutativ: k+l = k+l für alle k, lεK.
K\{0}, ·) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
r) · ist die Verknüpfung „Multiplikation" von Elementen k, lεK mit: ·: (k, l) -> k·lεK.
s) Die Verknüpfung · ist assoziativ: (k·l)·m = k·(l·m) für alle k, l, mεK.
t) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 1εK mit: 1 ≠ 0 und: 1·k = k·1 = k für alle kεK.
u) Für alle kεK mit k≠0 gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element k-1εK mit: k·k-1 = k-1·k = 1 mit neutralem Element 1.
v) Die Verknüpfung · ist kommutativ: k*l = l*k für alle k, lεK. Es gelten die Distributivgesetze:
w) k·(l+m) = k·l + k·m für alle k, l, mεK.
x) (k+l)·m = k·m + l·m für alle k, l, mεK.

Eine Teilmenge U des K-Vektorraums V ist ein K-<u>Unter(vektor)raum</u> von V, wenn U⊂V gilt und U die Eigenschaften eines K-Vektorraums besitzt. In dem Fall folgen die Eigenschaften eines Vektorraums aus der Tatsache, dass (durch + und · in V auf U induzierte) Linearkombinationen von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}\varepsilon U$ mit k, $l\varepsilon K$ ebenfalls einen Vektor $ka^{->}+lb^{->}\varepsilon U$ ergeben.

Reelle Vektorräume sind Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen **R**.

II. Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (m)$$

mit den reellen Variablen $x_1, \dots x_n$, den reellen Koeffizienten $a_{11}, \dots a_{mn}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) $b_1, \dots b_m$. Sind alle Zahlen $b_1, \dots b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen (n > m) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen (n < m) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Allgemein gilt nun für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a\neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n= b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c\neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1}+dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e - db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite (meist in der letzten Zeile) eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f\neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält in einer gewissen Zeile k ($1\leq k\leq n$) (meist in der letzten Zeile) im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable x_k, deren Diagonalelement = 0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ **L** = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rε**R**} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

III. Die Elemente $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Menge V genügen einem <u>homogenen linearen Gleichungssystem</u> der Form:

$x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$-20x_1 + x_3 = 0$.

Dies kann mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus wie folgt gelöst werden:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ \; 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = 0$
$- \; 20x_1 \qquad + 1x_3 = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	R.S.
1	-1	-1	0
-20	0	1	0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 20*(*1*) /

1	-1	-1	0
0	-20	-19	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ \; 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = 0$
$\qquad - 20x_2 - 19x_3 = 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = t$
$x_2 = -0.95t$
$x_1 = +0.05t$

-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t.

IV. Auf Grund von III. lässt sich die Menge V darstellen als:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 - x_2 - x_3 = 0 \wedge -20x_1 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t \in R \right\}.$$

Dies ist aber offenkundig ein (eindimensionaler) Untervektorraum des Vektorraums $\mathbf{R}^3$ (eine Ursprungsgerade in $\mathbf{R}^3$) wegen:

$$kt_1\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \\ 1 \end{pmatrix} + lt_2\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \\ 1 \end{pmatrix} = (kt_1 + lt_2)\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.95 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für reelle k, l, t_1, t_2 und $t = kt_1+lt_2$ reell.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1238