Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Lineare Unabhängigkeit von stetigen Funktionen

Aufgabe: Es sei C([-π; π], **R**) der reelle Vektorraum der stetigen Funktion auf dem Intervall [-π, π]. Zeige, dass die stetigen Funktion $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3(x) = \cos(x)$ linear unabhängig voneinander sind.

Lösung: I. Stetige Funktionen des Vektorraums C(I, **R**) mit $f_1, f_2, \dots f_n$: **I** -> **R** auf einem abgeschlossenen Intervall I, heißen linear unabhängig, wenn die auf die Nullfunktion o(x) = 0 führende Linearkombination der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$, wenn also für reelle α_i, i=1, …n, die lineare Beziehung (*)

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_n f_n(x) = 0 \text{ für alle } x\varepsilon I \ (*)$$

nur die (triviale) Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ besitzt.

II. Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \dots & \\ a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{array}$$

mit den reellen Variablen $x_1, \dots x_n$, den reellen Koeffizienten $a_{11}, \dots a_{mn}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) $b_1, \dots b_m$. Sind alle Zahlen $b_1, \dots b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen (n > m) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen (n < m) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & ... \\ a_{mn} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Allgemein gilt nun für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n = b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1}+dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e - db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite (meist in der letzten Zeile) eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält in einer gewissen Zeile k ($1 \leq k \leq n$) (meist in der letzten Zeile) im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable x_k, deren Diagonalelement = 0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ **L** = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rε**R**} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

III. Um die <u>lineare Unabhängigkeit</u> der drei Funktionen zu zeigen, gehen wir von der Beziehung (*) aus:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0$ für alle $-\pi \leq x \leq \pi$ (**).

(**) ist auch gültig für x = 0, x = π/2 und x = π, so dass sich daraus ein homogenes lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten ergibt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin \frac{\pi}{2} + \alpha_3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin \pi + \alpha_3 \cos \pi = 0,$$

d.h. wegen sin(0)=0, cos(0)=1, sin(π/2)=1, cos(π/2)=0, sin(π)=0, cos(π)=-1:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 0.$$

Der Gaußsche Algorithmus löst das homogene lineare Gleichungssystem:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 1\alpha_1 \quad + 1\alpha_3 = 0$

$+ 1\alpha1 + 1\alpha_2 \quad = 0$

$+ 1\alpha_1 \quad - 1\alpha_3 = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

α_1	α_2	α_3	R.S.
1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	-1	0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

1	0	1	0
0	1	-1	0
0	0	-2	0

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} +\ 1\alpha_1 & & +\ 1\alpha_3 & = & 0 \\ & +\ 1\alpha_2 & -\ 1\alpha_3 & = & 0 \\ & & -\ 2\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$\alpha_3 = 0$
$\alpha_2 = 0$
$\alpha_1 = 0$

-> eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

Mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1240