Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Vektorräume

Aufgabe: Die Ebene E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ durch den Ursprung des dreidimensionalen reellen Vektorraums V = $\mathbf{R}^3$ stellt ein zweidimensionaler Untervektorraum U mit Basis B = $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ dar. Bestimme eine Orthonormalbasis des Untervektorraums.

1. Lösung: I. Ein Tripel (V, +, ·) aus Menge und Verknüpfungen heißt K-Vektorraum über dem Körper (K, +, ·), wenn die folgenden Eigenschaften gelten: A) (V, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe; B) Mit ·: K × V -> V ist eine „skalare Multiplikation" auf V definiert, die assoziativ und mit dem neutralen Element 1εK versehen ist; C) Es gelten die Distributivgesetze hinsichtlich der Verknüpfungen + und ·.

Eine Teilmenge U des K-Vektorraums V ist ein K-Unter(vektor)raum von V, wenn U⊂V gilt und U die Eigenschaften eines K-Vektorraums besitzt. In dem Fall folgen die Eigenschaften eines Vektorraums aus der Tatsache, dass (durch + und · in V auf U induzierte) Linearkombinationen von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$εU mit k, lεK ebenfalls einen Vektor $ka^{->}+lb^{->}$εU ergeben.

Reelle Vektorräume sind Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen **R**.

Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ in einem K-Vektorraum V heißen linear unabhängig, wenn die Linearkombination $k_1a_1^{->}$ + … $k_na_n^{->}$ = $0^{->}$, k_1, … k_n εK, nur auf k_1 = … = k_n = 0 führt. Für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V heißt eine Menge B = {$a_1^{->}$, … $a_n^{->}$}, nε**N**, eine Basis, wenn die Basisvektoren linear unabhängig sind und den Vektorraum V erzeugen, d.h. für jeden Vektor $a^{->}$εV gilt (in eindeutiger Weise): $a^{->}$ = $k_1a_1^{->}$ + … $k_na_n^{->}$, k_1, … k_n εK. Der Vektorraum V ist das Erzeugnis von B: V = <B> und besitzt die Dimension: dim(V) = n. Jeder Vektorraum V, auch ein Untervektorraum U besitzt eine Basis.

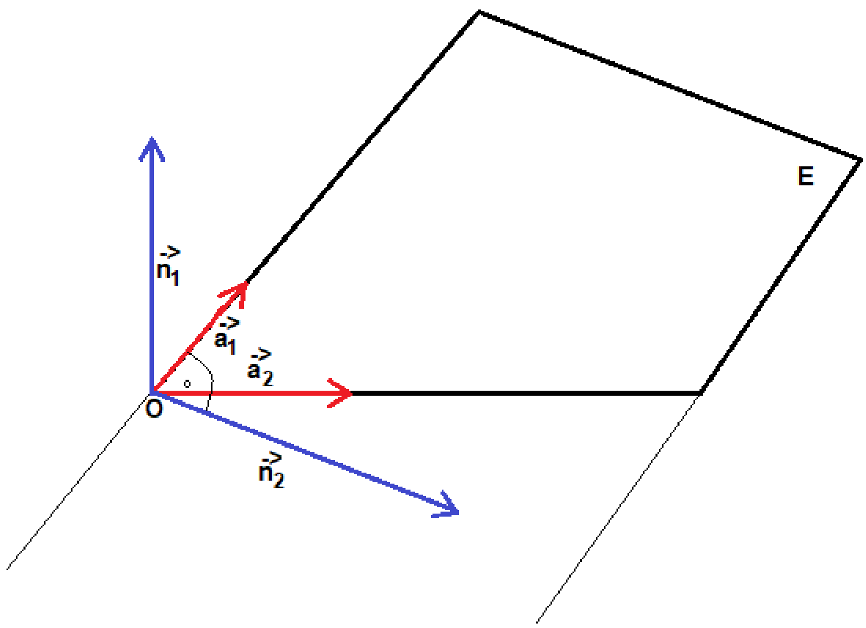
Ist auf einem Vektorraum V zudem ein Skalarprodukt definiert, d.h. eine Abbildung, die zwei Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$ eine Zahl $<a^{->}, b^{->}>$ des Körpers K zuordnet mit den Eigenschaften der Symmetrie, Linearität und positiven Definitheit, so lässt sich das Konzept der Orthogonalität einführen, d.h.: zwei Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn $<a^{->}, b^{->}> = 0$ gilt. Eine Orthonormalbasis ist eine Basis des Vektorraums, deren linear unabhängige Vektoren paarweise senkrecht zueinander stehen und die Länge 1 besitzen. Dabei bezieht sich die Länge oder der Betrag eines Vektors $a^{->}$ auf die durch das Skalarprodukt induzierte Norm u.a. mit $|a^{->}| = \sqrt{<\vec{a}, \vec{a}>}$ (= 1, wenn $a^{->}$ normiert ist).

II. Mit V = $\mathbf{R}^3$ als reellen dreidimensionalen Vektorraum mit kanonischem Skalarprodukt lässt sich für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ das äußere, Vektor- oder Kreuzprodukt definieren als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor des Kreuzprodukts steht dann senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

III. Die Orthogonalität des Kreuzprodukts können wir ausnutzen, um aus der Basis B = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Orthonormalbasis B* abzuleiten. Dazu betrachten wir die durch den Ursprung O(0|0|0) verlaufende Ebene E: $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Basisvektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:



Der Kreuzproduktvektor $\vec{n}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf den Basisvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und ist ein senkrecht zur Ebene E stehender Normalenvektor der Ebene. Der Kreuzproduktvektor $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht wiederum senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{n}_1$ und liegt daher in der Ebene E. Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{n}_2$ sind mithin Vektoren einer Basis des die Ebene darstellenden Untervektorraums U, die orthogonal zueinander stehen. Normieren wir die zwei Vektoren, so erhalten wir als Einheitsvektoren:

$$\vec{a}_1^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine <u>Orthonormalbasis</u> des Untervektorraums U ist damit: B* = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Lösung: I. Ein Tripel (V, +, ·) aus Menge und Verknüpfungen heißt K-<u>Vektorraum</u> über dem Körper (K, +, ·), wenn die folgenden Eigenschaften gelten: A) (V, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe; B) Mit ·: K × V -> V ist eine „skalare Multiplikation“ auf V definiert, die assoziativ und mit dem neutralen Element 1εK versehen ist; C) Es gelten die Distributivgesetze hinsichtlich der Verknüpfungen + und ·.

Eine Teilmenge U des K-Vektorraums V ist ein K-<u>Unter(vektor)raum</u> von V, wenn U⊂V gilt und U die Eigenschaften eines K-Vektorraums besitzt. In dem Fall folgen die Eigenschaften eines Vektorraums aus der Tatsache, dass (durch + und · in V auf U induzierte) Linearkombinationen von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$εU mit k, lεK ebenfalls einen Vektor $ka^{->}+lb^{->}$εU ergeben.

Reelle Vektorräume sind Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen **R**.

Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ in einem K-Vektorraum V heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn die Linearkombination $k_1a_1^{->}$ + … $k_na_n^{->}$ = $0^{->}$, k_1, … k_n εK, nur auf k_1 = … = k_n = 0 führt. Für einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V heißt eine Menge B = {$a_1^{->}$, … $a_n^{->}$}, nε**N**, eine <u>Basis</u>, wenn die Basisvektoren linear unabhängig sind und den Vektorraum V erzeugen, d.h. für jeden Vektor $a^{->}$εV gilt (in eindeutiger Weise): $a^{->}$ = $k_1a_1^{->}$ + … $k_na_n^{->}$, k_1, … k_n εK. Der Vektorraum V ist das Erzeugnis von B: V = <B> und besitzt die Dimension: dim(V) = n. Jeder Vektorraum V, auch ein Untervektorraum U besitzt eine Basis.

Ist auf einem Vektorraum V zudem ein <u>Skalarprodukt</u> definiert, d.h. eine Abbildung, die zwei Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$ eine Zahl <$a^{->}$, $b^{->}$> des Körpers K zuordnet mit den Eigenschaften der Symmetrie, Linearität und positiven Definitheit, so lässt sich das Konzept der <u>Orthogonalität</u> einführen, d.h.: zwei Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn <$a^{->}$, $b^{->}$> = 0 gilt. Eine <u>Orthonormalbasis</u> ist eine Basis des Vektorraums, deren linear unabhängige Vektoren paarweise senkrecht zueinander stehen und die Länge 1 besitzen. Dabei bezieht sich die Länge oder der <u>Betrag eines Vektors</u> $a^{->}$ auf die durch das (kanonische) Skalarprodukt induzierte <u>Norm</u> u.a. mit |$a^{->}$| = $\sqrt{<\vec{a},\vec{a}>}$ (= 1, wenn $a^{->}$ normiert ist).

II. Eine Basis eines reellen Vektorraums, bestehend aus linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, wird zu einer Orthonormalbasis, wenn das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt angewendet wird.

1. Schritt: Erzeugung orthogonaler Vektoren mit Hilfe des (kanonischen) Skalarprodukts vermöge:

$$\vec{a}_1^* = \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_2^* = \vec{a}_2 - \frac{<\vec{a}_1^*, \vec{a}_2>}{<\vec{a}_1^*, \vec{a}_1^*>}\vec{a}_1^*$$

$$\vec{a}_3^* = \vec{a}_3 - \frac{<\vec{a}_1^*, \vec{a}_3>}{<\vec{a}_1^*, \vec{a}_1^*>}\vec{a}_1^* - \frac{<\vec{a}_2^*, \vec{a}_3>}{<\vec{a}_2^*, \vec{a}_2^*>}\vec{a}_2^*$$

usw.

2. Schritt: (Kanonische) Normierung der erzeugten orthogonalen Vektoren vermöge:

$$\vec{a}_1^{*0} = \frac{1}{\left|\vec{a}_1^{*}\right|}\vec{a}_1^{*}$$

$$\vec{a}_2^{*0} = \frac{1}{\left|\vec{a}_2^{*}\right|}\vec{a}_2^{*}$$

$$\vec{a}_3^{*0} = \frac{1}{\left|\vec{a}_3^{*}\right|}\vec{a}_3^{*}$$

Die Vektoren B* = $\left\{\vec{a}_1^{*0}, \vec{a}_2^{*0}, ...\right\}$ bilden dann eine Orthonormalbasis des reellen Vektorraums.

III. Wir wenden das Orthogonalisierungsverfahren an und haben zunächst:

$$\vec{a}_1^{*} = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

weiter:

$$\vec{a}_2^{*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}>}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normierung der Vektoren ergibt:

$$\vec{a}_1^{*0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2^{*0} = \vec{a}_2^{*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine <u>Orthonormalbasis</u> des Untervektorraums U ist damit: B* = $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1279