Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegral

Aufgabe: Leite mit Hilfe eines Volumenintegrals die geometrische Formel für das Volumen eines Kegelstumpfs her, wenn der Kegelstumpf die Radien r_1, $r_2 > 0$ ($r_1 > r_2$) und die Höhe h besitzt:

$$V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi h\left[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right].$$

Lösung: I. Für eine auf dem Intervall [a; b] definierte, integrierbare Funktion f(x) (≥0) hat der Rotationskörper, der durch Drehung der Fläche zwischen Funktion und x-Achse <u>um die x-Achse</u> entsteht, das <u>Volumen(integral)</u>:

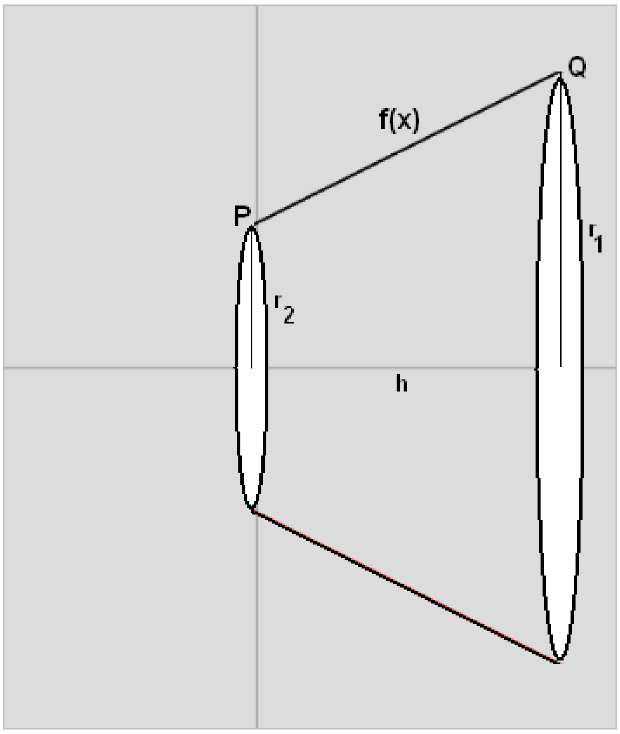
$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx .$$

II. Die <u>Außenlinie</u> des Kegelstumpfes ist eine Gerade y = mx + c, die wir passend in ein x-y-Koordinatensystem platzieren, um sie dann um die x-Achse rotieren zu lassen. Der Kegelstumpf habe an der Grundfläche den Radius r_1, an der Deckfläche den Radius r_2, die Höhe betrage h. Im x-y-Koordinatensystem ist die Mittelachse des Kegelstumpfs die x-Achse, der Integrationsbereich das Intervall [0; h], die Funktion y = f(x) eine Gerade durch die Punkte $P(0|r_2)$ und $Q(h|r_1)$. Etwa nach der 2-Punkte-Form lässt sich dann die Gerade y bestimmen als:

$$\frac{y-r_2}{x-0} = \frac{r_1-r_2}{h-0} \Leftrightarrow \frac{y-r_2}{x} = \frac{r_1-r_2}{h} \Leftrightarrow y-r_2 = \frac{r_1-r_2}{h}x \Leftrightarrow y = \frac{r_1-r_2}{h}x + r_2 .$$

Die Außenlinie genügt also der Funktionsgleichung:

$$y = f(x) = \frac{r_1-r_2}{h}x + r_2 .$$



III. Wir lassen f(x) um die x-Achse im Bereich [0; h] rotieren und erhalten als Volumenintegral:

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r_1-r_2}{h}x+r_2\right)^2 dx = \pi\int_0^h \left[\left(\frac{r_1-r_2}{h}\right)^2 x^2 + 2\left(\frac{r_1-r_2}{h}\right)r_2 x + r_2^2\right]dx =$$

$$\pi\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r_1-r_2}{h}\right)^2 x^3 + \left(\frac{r_1-r_2}{h}\right)r_2 x^2 + r_2^2 x\right]_0^h = \pi\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r_1-r_2}{h}\right)^2 h^3 + \left(\frac{r_1-r_2}{h}\right)r_2 h^2 + r_2^2 h\right] =$$

$$\pi\left[\frac{1}{3}(r_1-r_2)^2 h + (r_1-r_2)r_2 h + r_2^2 h\right] = \frac{1}{3}\pi h\left[(r_1-r_2)^2 + 3(r_1-r_2)r_2 + 3r_2^2\right] =$$

$$\frac{1}{3}\pi h\left[r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 + 3r_1r_2 - 3r_2^2 + 3r_2^2\right] = \frac{1}{3}\pi h\left[r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right].$$

Damit gilt die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfs:

$$V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi h\left[r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right].$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 253