Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegral

Aufgabe: Leite mit Hilfe eines Volumenintegrals die geometrische Formel für das Volumen einer Kugel mit Radius r > 0 her:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Lösung: I. Für eine auf dem Intervall [a; b] definierte, integrierbare Funktion f(x) (≥0) hat der Rotationskörper, der durch Drehung der Fläche zwischen Funktion und x-Achse <u>um die x-Achse</u> entsteht, das <u>Volumen(integral)</u>:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx .$$

II. Der Kreis als <u>Außenlinie</u> der Kugel ergibt sich vermöge der Beziehung:

$x^2 + y^2 = r^2$

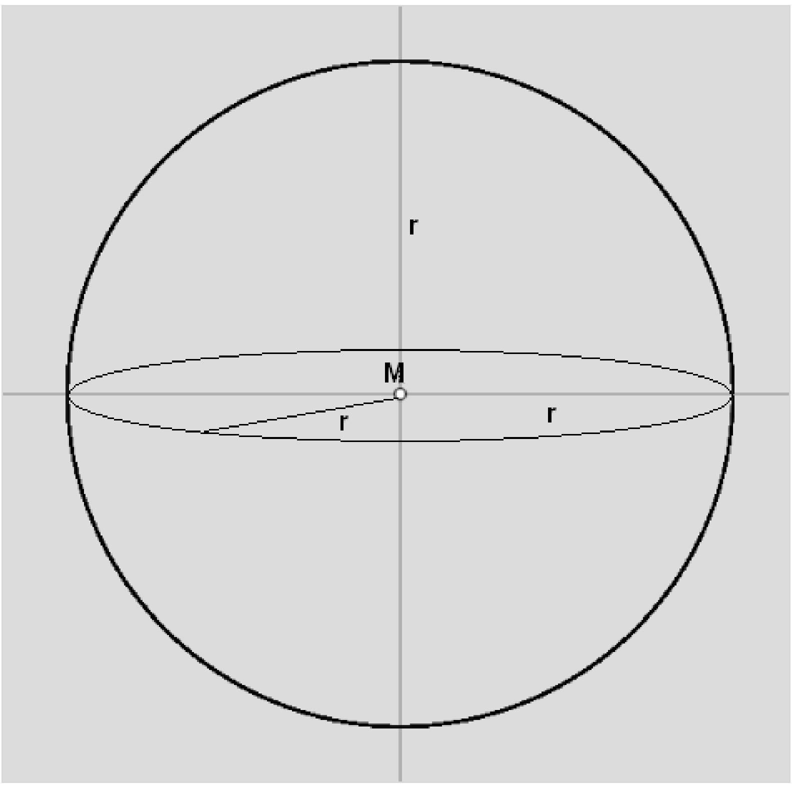
im x-y-Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O(0|0) als Kreis- bzw. Kugelmittelpunkt durch Umstellung nach y = f(x):

$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 – x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$,

d.h.:

y = $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

mit D_f = [-r; r] als Definitionsbereich.



III. Das Volumenintegral im Intervall [-r; r] und damit das Volumen der Kugel als Rotationskörper errechnet sich als:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r} =$$

$$\pi \left[\left(r^2 r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right) \right]_{-r}^{r} = 2\pi \left[r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right] = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Damit gilt die Formel für das Volumen einer Kugel:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 254