

III. Das Volumenintegral im Intervall $[-r; r]$ und damit das Volumen der Kugel als Rotationskörper errechnet sich als:

$$V = \pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r =$$
$$\pi \left[\left(r^2 r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 (-r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right) \right]_{-r}^r = 2\pi \left[r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right] = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Damit gilt die Formel für das Volumen einer Kugel:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$