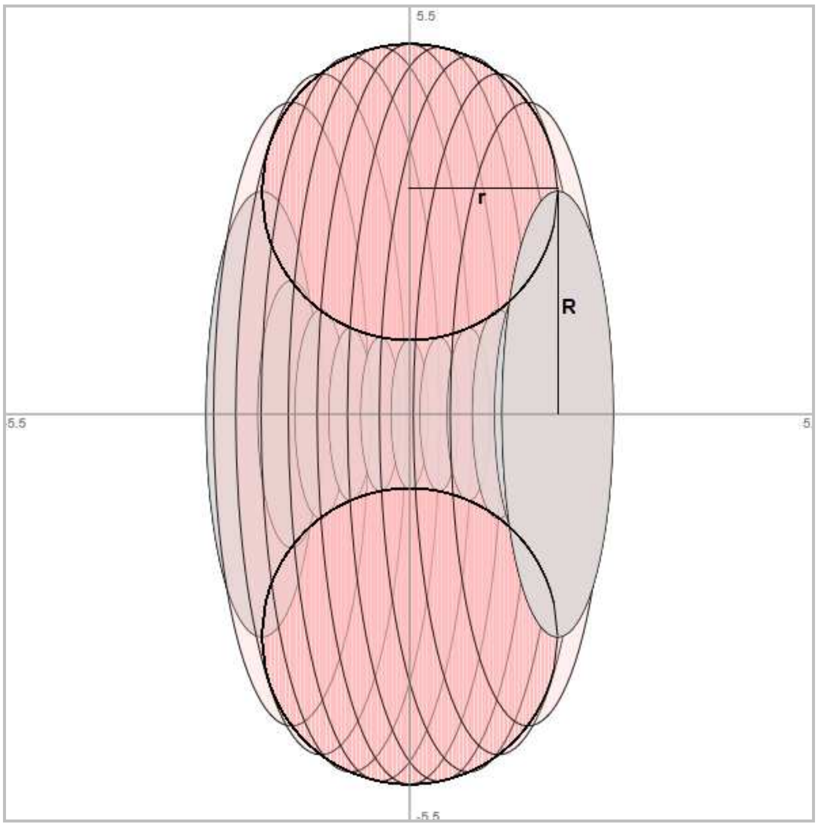
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegral

Aufgabe: Leite mit Hilfe eines Volumenintegrals die geometrische Formel für das Volumen eines Torus mit Innenradius r > 0 und Außenradius R > 0 her:

$$V_{Torus} = 2\pi^2 r^2 R\,.$$



Lösung: I. Für zwei auf dem Intervall [a; b] definierte, integrierbare Funktionen f(x), g(x) mit f(x) ≥ g(x) hat der Rotationskörper, der durch Drehung der Fläche zwischen den Funktionen um die x-Achse entsteht, das Volumen(integral):

$$V = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx\,.$$

II. Ein Kreis mit (Innen-) Radius r ist die Außenlinie des Torus. Es gilt folglich die Beziehung:

$x^2 + y^2 = r^2$

im x-y-Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O(0|0) als Kreismittelpunkt durch Umstellung nach y = f(x):

$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$,

d.h.:

y = $\sqrt{r^2 - x^2}$

mit D_y = [-r; r] als Definitionsbereich.

III. Wir definieren nun auf Grund von II. die zwei Funktionen f(x) und g(x), die den Kreis als Querschnittsfläche des Torus begrenzen, als:

f(x) = $\sqrt{r^2 - x^2} + R$ (oberer Kreisbogen)

g(x) = $R - \sqrt{r^2 - x^2}$ (unterer Kreisbogen).

Es ist f(x) ≥ g(x) auf der Definitionsmenge $D_f = D_g$ = [-r; r], so dass für das Volumenintegral der um die x-Achse rotierenden Fläche zwischen den Funktionen gilt:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2} + R \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right) dx = (1).$$

Der Integrand des Integrals (1) lässt mit Hilfe der 1. und 2. binomischen Formel ausrechnen ($(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$). Damit ergibt sich:

$$(1) = \pi \int_{-r}^{r} \left(\left(\left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2 \right) - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right) \right) dx =$$

$$\pi \int_{-r}^{r} \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2 - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} - \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right) dx =$$

$$\pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = (2).$$

Für das Integral (2) gilt wegen der Symmetrie der Funktionen f(x), g(x) und mithin auch f(x)-g(x) zur y-Achse des Koordinatensystems sowie wegen der Symmetrie des Integrationsbereichs [-r; r], dass sich das Volumen des Rotationskörpers durch Verdopplung des halben Volumens bestimmen lässt; also:

$$(2) = 4\pi R \cdot 2 \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = (3).$$

IV. Das Integral (3) errechnen wir durch Integration unter Ermittlung der Stammfunktion gemäß der (in VI. bewiesenen) Identität für das unbestimmte Integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a} \right) + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right) \quad (*)$$

für reelles a≠0. Mit a=r folgt aus (*):

$$(3) = 8\pi R \left[\frac{1}{2} \left(r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r} \right) + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right) \right]_0^r = 4\pi R \left[r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r} \right) + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r =$$

$$4\pi R \left[\left(r^2 \arcsin\left(\frac{r}{r} \right) + r \cdot \sqrt{r^2 - r^2} \right) - \left(r^2 \arcsin\left(\frac{0}{r} \right) + 0 \cdot \sqrt{r^2 - 0^2} \right) \right] =$$

$$4\pi R \left[\left(r^2 \arcsin(1) + r \cdot 0 \right) - \left(r^2 \arcsin(0) + 0 \cdot \sqrt{r^2} \right) \right] = 4\pi R \left[r^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right] = 2\pi^2 r^2 R,$$

womit die in der Aufgabenstellung angeführte Formel bewiesen ist. Es ergibt sich:

$$V_{Torus} = 2\pi^2 r^2 R$$

als Torusvolumen.

V. Wir folgern noch: Offensichtlich ist das Volumen eines Torus mit Innenradius r > 0 und Außenradius R > 0 gleich dem Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h = 2πR. Hier kommt der den Torus durchziehenden Mittellinie, der Linie des Kreises mit Radius R, eine besondere Rolle zu; der Umfang dieses Kreises ist die Höhe des Zylinders.

VI. Zusatz: Wir berechnen noch das unbestimmte Integral: $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$. Ausklammern, Substitution mit: $\frac{x}{a}=\sin u \Rightarrow x=a\sin u$, $\frac{dx}{du}=a\cos u \Rightarrow dx=a\cos u du$ gemäß der Substitutionsregel, trigonometrische Beziehung $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, Produktintegration mit: y' = cos*x*, y = sin*x*, z = cos*x*, z' = -sin*x* und Rücksubstitution mit: $\sin u=\frac{x}{a}$, $\sin u=\frac{x}{a} \Rightarrow u=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$,

$\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ führen dabei auf folgende Umformungen:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=a\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx \underset{Substitution}{=} a\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot a\cos u du =$$

$$a^2\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u du = a^2\int\cos u\cdot\cos u du=a^2\int\cos^2 u du \underset{Produktintegration}{=}$$

$$a^2\cdot\frac{u+\sin u\cdot\cos u}{2}=\frac{a^2}{2}(u+\sin u\cdot\cos u) \underset{Rücksubstitution}{=} a^2\left(\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{2}\right)=$$

$$\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+ax\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+x\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

wegen:

$$\int\cos^2 u du=\int\cos u\cdot\cos u du \underset{Produktintegration}{=} \sin u\cdot\cos u-\int\sin u\cdot(-\sin u)du =$$

$$\sin u\cdot\cos u+\int\sin^2 u du=\sin u\cdot\cos u+\int(1-\cos^2 u)du =$$

$$\sin u\cdot\cos u+\int 1du-\int\cos^2 u du=\sin u\cdot\cos u+u-\int\cos^2 u du \underset{+\int\cos^2 udu}{\Leftrightarrow}$$

$$2\int\cos^2 u du=u+\sin u\cdot\cos u \underset{:2}{\Leftrightarrow}\int\cos^2 u du=\frac{u+\sin u\cdot\cos u}{2}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit: $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+x\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)$ + C mit C als reeller Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 06.2019 / Aufgabe 858