Michael Buhlmann

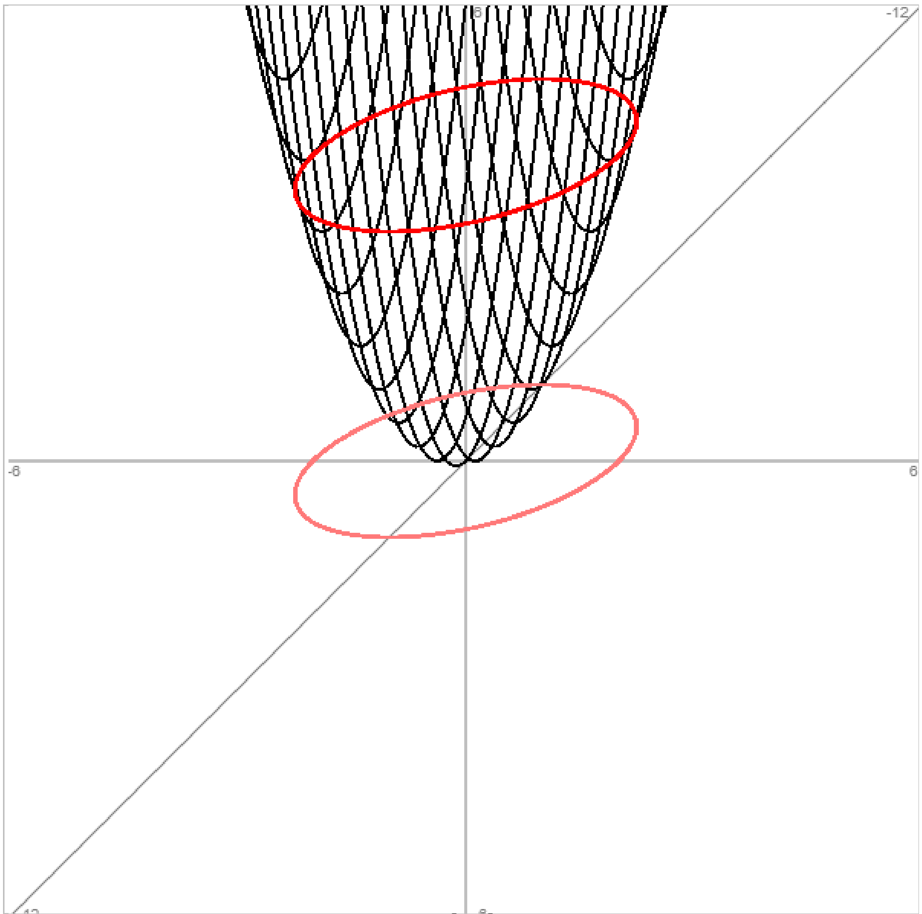
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegrale

Aufgabe: Berechne das Volumen zwischen Paraboloid und Ebene

$$z_1 = f(x,y) = x^2+y^2,\ z_2 = 4$$

im dreidimensionalen reellen Raum.

1. Lösung: I. Wir identifizieren die <u>Funktion</u> $z_1 = f(x,y) = x^2+y^2$ mit zwei Unbekannten x, y als Paraboloid im dreidimensionalen reellen Raum über den Bereich $x^2+y^2 \le 4$:



$z = f(x,y) = x^2+y^2$, $-2 \le x, y \le 2$

Der (Integrations-) <u>Bereich</u> ergibt sich dabei wegen $z_1 = z_2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$ als Kreis der x-y-Ebene mit Mittelpunkt M(0|0) und Radius 2 und damit als: $x^2+y^2 \le 4$.

II. Wir verwenden im Folgenden die unbestimmten Integrale mit reellem a:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin(\frac{x}{a}) \right)$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{8}\left(2x^3\sqrt{a^2-x^2} - a^2 x\sqrt{a^2-x^2} + a^4 \arcsin(\frac{x}{a}) \right).$$

III. Das Volumenintegral ergibt sich gemäß dem Bereich $x^2+y^2 \le 4$ durch dreifache Integration entlang $x^2+y^2 \le z \le 4$, $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$, $-2 \le x \le 2$ als:

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [z]_{x^2+y^2}^{4}\, dydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-(x^2+y^2))dydx$$

$$\underset{z-Achsensymmetrie}{=} 4\cdot\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-(x^2+y^2))dydx = 4\cdot\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2)dydx$$

$$= 4\cdot\int_0^2 \left[4y - x^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = 4\cdot\int_0^2 (4\sqrt{4-x^2} - x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3} - 0)dx$$

$$= 4\cdot\int_0^2 (4\sqrt{4-x^2} - x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3})dx = 4\cdot\int_0^2 (4\sqrt{4-x^2} - x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2})dx$$

$$= 4\cdot\int_0^2 \left(\frac{8}{3}\sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3}x^2\sqrt{4-x^2}\right)dx = \frac{32}{3}\cdot\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx - \frac{8}{3}\cdot\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin(\frac{x}{2})\right)\right]_0^2 - \frac{8}{3}\cdot\left[\frac{1}{8}\left(2x^3\sqrt{a^2-x^2} - a^2x\sqrt{a^2-x^2} + a^4\arcsin(\frac{x}{a})\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\left((0+4\cdot\frac{\pi}{2})-0\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(((0+16\cdot\frac{\pi}{2}))-0\right) = \frac{32}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = 8\pi.$$

2. Lösung: I. Der (Integrations-) Bereich ergibt sich dabei wegen $z_1 = z_2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$ als Kreis der x-y-Ebene mit Mittelpunkt M(0|0) und Radius 2 und damit als: $x^2+y^2 \le 4$. Folglich führt die Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten auf:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z_1 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$$

$$z_2 = 4$$

für $0 \le r \le 2$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$.

II. Das Volumenintegral ergibt sich gemäß dem Bereich $x^2+y^2 \le 4$ durch dreifache Integration entlang $x^2+y^2 \le z \le 4$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ als:

$$V = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^{4} dzd\varphi rdr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(4-r^2)d\varphi rdr = \int_0^2 (4r-r^3)\int_0^{2\pi} d\varphi rdr = \int_0^2 (4r-r^3)[\varphi]_0^{2\pi}\, dr$$

$$= \int_0^2 (4r-r^3)(2\pi-0)dr = 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)dr = 2\pi\cdot\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 2\pi\cdot(8-4-0) = 8\pi.$$

3. Lösung: Das zur z-Achse symmetrische Paraboloid $z_1 = f(x,y) = x^2+y^2$ stellt einen Rotationskörper dar, dessen Volumen auch mit Hilfe der eindimensionalen Analysis berechnet werden kann. Es rotiere dazu die Funktion: $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, um die x-Achse. Das Volumenintegral berechnet sich als:

$$V = \pi\int_0^4 y^2dx = \pi\int_0^4 \sqrt{x}^2dx = \pi\int_0^4 xdx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 - 0\right) = 8\pi.$$