Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegral, Keplersche Fassregel

Aufgabe: Der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (*1571-†1630) handelte im Laufe seines Lebens auch mit Wein. Der Weinhandel wiederum bedingte, den Rauminhalt von Weinfässern zu bestimmen. Kepler entwickelte dazu eine Näherungsformel, die Keplersche Fassregel. Für Weinfässer, die einem Rotationskörper mit kreisförmigen Querschnittflächen entsprechen, ergibt sich damit ein Volumen:

$$V = \frac{h}{6}\left[A_a + 4A_{\frac{a+b}{2}} + A_b \right]$$

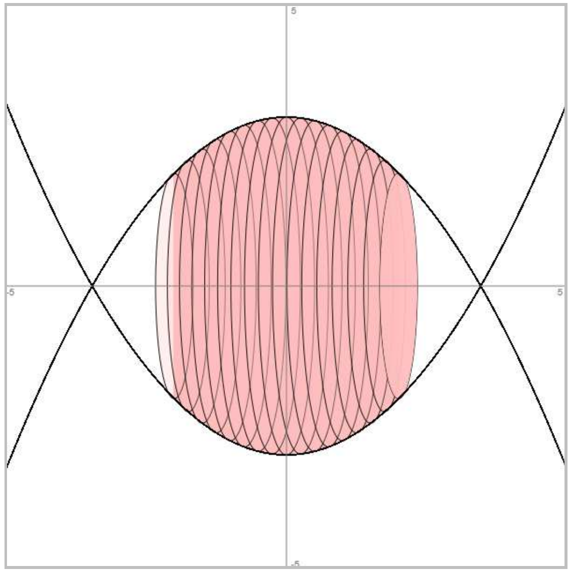
mit: Fasshöhe h = b-a, unterer Fassfläche A_a, mittlerem Fassquerschnitt $A_{\frac{a+b}{2}}$, oberer Fassfläche A_b; dabei errechnet sich die Kreisfläche als A = πr^2 mit r als Kreisradius. Besitzt das Fass als Rotationskörper eine auf einem Intervall [a; b] definierte integrierbare Funktion f(x) als Fassumrandung, so gilt bei Fasshöhe h = b-a: untere Fassfläche $A_a = \pi[f(a)]^2$, mittlerer Fassquerschnitt $A_{\frac{a+b}{2}} = \pi[f(\frac{a+b}{2})]^2$, obere Fassfläche $A_b = \pi[f(b)]^2$.

a) Berechne mit der Keplerschen Fassregel eine (numerische) Näherung für das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die quadratische Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ über dem Intervall [-2; 2] um die x-Achse rotiert.

b) Berechne mit Hilfe der Volumenformel für Körper einer um die x-Achse auf dem Intervall [a; b] rotierenden Funktion f(x):

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

den Rauminhalt des Rotationskörpers der quadratischen Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ über dem Intervall [-2; 2] exakt. Um wie viel Prozent weicht der Wert der Keplerschen Fassregel vom exakten Volumenwert ab?



c) Die Keplersche Fassregel wird nun für die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ auf Teilintervalle des Intervalls [-2; 2] angewendet. Betrachte dazu die Intervalle [-2; -1], [-1; 0], [0; 1] und [1; 2] und berechne jeweils nach der Keplerschen Fassregel. Um wie viel Prozent weicht nun der Wert der Keplerschen Fassregel vom exakten Volumenwert ab?

Für eine integrierbare Funktion f(x) gilt als sog. Simpsonregel für $(f(x))^2$ die Näherung:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \approx \frac{b-a}{6}\pi\left[[f(a)]^2 + 4[f(\frac{a+b}{2})]^2 + [f(b)]^2\right].$$

Dies entspricht der Keplerschen Fassregel. Wird die Simpsonregel verkettet, d.h. – wie gesehen – auf 2n Teilintervalle des Intervalls [a; b], nε**N**, angewendet, so ergibt sich als numerische Näherung für den exakten Wert des Volumenintegrals:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \approx \frac{\pi}{3}d\cdot\Big([f(a)]^2 + 4\big([f(a+d)]^2 + [f(a+3d)]^2 + \ldots + [f(b-d)]^2\big) + 2\big([f(a+2d)]^2 + [f(a+4d)]^2 + \ldots + [f(b-2d)]^2\big) + [f(b)]^2\Big)$$

mit $d = \frac{b-a}{2n}$.

Lösung: a) Gemäß der Keplerschen Fassregel berechnen wir die folgenden Kreisflächen mit Bezug auf die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ und das Intervall [-2; 2] mit den Stellen x=-2, x=0, x=2:

$A_{-2} = \pi(f(-2))^2 = A_2 = \pi(f(2))^2 = \pi(-2^2/4+3)^2 = \pi\cdot 2^2 = 4\pi = 12{,}56$ FE
$A_0 = \pi(f(0))^2 = \pi(-0^2/4+3)^2 = \pi\cdot 3^2 = 9\pi = 28{,}27$ FE.

Eine (numerische) Näherung für das Volumen des Rotationskörpers ist dann:

$$V = \pi\int_{-2}^{2}(f(x))^2 dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}x^2+3\right)^2 dx \approx \frac{2-(-2)}{6}\left[A_{-2} + 4A_0 + A_2\right] = \frac{4}{6}\left[4\pi + 4\cdot 9\pi + 4\pi\right] = \frac{2}{3}\cdot 44\pi = \frac{88}{3}\pi \approx 92{,}15 \text{ VE}.$$

b) Zur exakten Volumenberechnung integrieren wir das bestimmte Integral über $(f(x))^2$ unter Verwendung der 2. binomischen Formel und wegen der y-Achsensymmetrie von f(x):

$$V = \pi\int_{-2}^{2}(f(x))^2 dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}x^2+3\right)^2 dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 9\right)dx = 2\pi\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 9\right)dx = 2\pi\left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 9x\right]_0^2 =$$

$$2\pi\left(\frac{1}{80}\cdot 2^5 - \frac{1}{2}\cdot 2^3 + 9\cdot 2\right) - 0 = 2\pi\cdot\left(\frac{2}{5} - 4 + 18\right) = 2\pi\cdot\frac{72}{5} = \frac{144}{5}\pi \approx 90{,}48 \text{ VE}.$$

Die prozentuale Abweichung der Näherung bezogen auf den exakten Wert berechnet sich als:

$$\frac{\left|\frac{88}{3}\pi-\frac{144}{5}\pi\right|}{\frac{144}{5}\pi}=\frac{\frac{8}{15}\pi}{\frac{144}{5}\pi}=\frac{1}{54}\approx$$ 0,0185 = 1,85 %.

c) Wir wenden die Keplersche Fassregel viermal an, brauchen aber wegen der y-Achsensymmetrie von Funktion $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+3$ und Intervall [-2; 2] nur zweimal rechnen und beziehen uns dabei auf die Teilintervalle [0; 1] und [1; 2]. Es gilt ähnlich wie in a) für die Kreisflächen:

$A_0 = \pi(f(0))^2 = \pi(-0^2/4+3)^2 = \pi\cdot 3^2 = 9\pi = 28{,}27$ FE

$A_{0,5} = \pi(f(0,5))^2 = \pi(-0,5^2/4+3)^2 = \pi\cdot 2{,}9375^2 = \frac{2209}{256}\pi = 27{,}11$ FE

$A_1 = \pi(f(1))^2 = \pi(-1^2/4+3)^2 = \pi\cdot 2{,}75^2 = \frac{121}{16}\pi = 23{,}76$ FE

$A_{1,5} = \pi(f(1,5))^2 = \pi(-1,5^2/4+3)^2 = \pi\cdot 2{,}4375^2 = \frac{1521}{256}\pi = 18{,}67$ FE

$A_2 = \pi(f(2))^2 = \pi(-2^2/4+3)^2 = \pi\cdot 2^2 = 4\pi = 12{,}56$ FE.

Die Teilvolumennäherung für die Intervalle [0; 1] und [1; 2] lautet dann:

$$V_{[0;1]}=\pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{4}x^2+3\right)^2 dx\approx\frac{1-0}{6}\left[A_0+4A_{0,5}+A_1\right]=\frac{1}{6}\left[9\pi+4\cdot\frac{2209}{256}\pi+\frac{121}{16}\pi\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{3269}{64}\pi=\frac{3269}{384}\pi\approx 26{,}74 \text{ VE}$$

$$V_{[1;2]}=\pi\int_1^2 (f(x))^2\,dx=\pi\int_1^2\left(-\frac{1}{4}x^2+3\right)^2 dx\approx\frac{2-1}{6}\left[A_1+4A_{1,5}+A_2\right]=\frac{1}{6}\left[\frac{121}{16}\pi+4\cdot\frac{1521}{256}\pi+4\pi\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{2261}{64}\pi=\frac{2261}{384}\pi\approx 18{,}49 \text{ VE.}$$

Wegen der y-Achsensymmetrie ist $V_{[-2;-1]} = V_{[1;\,2]}$ und $V_{[-1;0]} = V_{[0;\,1]}$ und das Gesamtvolumen und dessen Näherung:

$$V=\pi\int_{-2}^2 (f(x))^2\,dx=\pi\int_{-2}^2\left(-\frac{1}{4}x^2+3\right)^2 dx=V_{[-2;-1]}+V_{[-1;0]}+V_{[0;1]}+V_{[1;2]}=2\left(V_{[0;1]}+V_{[1;2]}\right)\approx 2\left(\frac{3269}{384}\pi+\frac{2261}{384}\pi\right)=\frac{2765}{96}\pi\approx 90{,}48 \text{ VE.}$$

Damit ist prozentuale Abweichung der Näherung bezogen auf den exakten Wert wesentlich niedriger:

$$\frac{\left|\frac{2765}{96}\pi-\frac{144}{5}\pi\right|}{\frac{144}{5}\pi}=\frac{\frac{1}{480}\pi}{\frac{144}{5}\pi}=\frac{1}{13824}\approx$$ 0,0000723 = 0,00723 %.

(FE = Flächeneinheiten, **N** = Menge der natürlichen Zahlen, VE = Volumeneinheiten)