Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegral, Keplersche Fassregel

Aufgabe: Der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (*1571-†1630) handelte im Laufe seines Lebens auch mit Wein. Der Weinhandel wiederum bedingte, den Rauminhalt von Weinfässern zu bestimmen. Kepler entwickelte dazu eine Näherungsformel, die Keplersche Fassregel. Für Weinfässer, die einem Rotationskörper mit kreisförmigen Querschnittflächen (zur Längsachse) entsprechen, ergibt sich damit ein Volumen:

$$V = \frac{h}{6}\left[A_a + 4A_{\frac{a+b}{2}} + A_b \right]$$

mit: Fasshöhe h = b-a, unterer Fassfläche A_a, mittlerem Fassquerschnitt $A_{\frac{a+b}{2}}$, oberer Fassfläche A_b; dabei errechnet sich die Kreisfläche als A = πr^2 mit r als Kreisradius. Besitzt das Fass als Rotationskörper eine auf einem Intervall [a; b] definierte integrierbare Funktion f(x) als Fassumrandung, so gilt bei Fasshöhe h = b-a: untere Fassfläche $A_a = \pi[f(a)]^2$, mittlerer Fassquerschnitt $A_{\frac{a+b}{2}} = \pi[f(\frac{a+b}{2})]^2$, obere Fassfläche $A_b = \pi[f(b)]^2$.

a) Berechne mit der Keplerschen Fassregel eine (numerische) Näherung für das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Exponentialfunktion $f(x) = 4e^{-0,5x}$ über dem Intervall [0; 6] um die x-Achse rotiert.

b) Berechne mit Hilfe der Volumenformel für Körper einer um die x-Achse auf dem Intervall [a; b] rotierenden Funktion f(x):

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx$$

den Rauminhalt des Rotationskörpers der Exponentialunktion $f(x) = 4e^{-0,5x}$ über dem Intervall [0; 6] exakt. Um wie viel Prozent weicht der Wert der Keplerschen Fassregel vom exakten Volumenwert ab? Warum ist die Abweichung so groß?

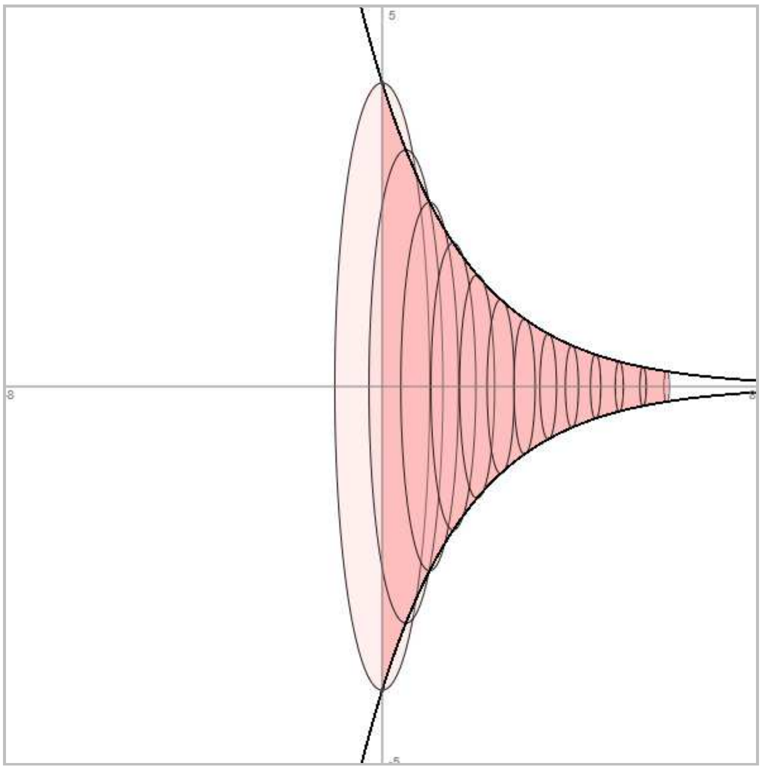
Lösung: a) Gemäß der Keplerschen Fassregel berechnen wir die folgenden Kreisflächen mit Bezug auf die Funktion $f(x) = 4e^{-0,5x}$ und das Intervall [0; 6] mit den Stellen x=0, x=3, x=6:

$A_0 = \pi(f(0))^2 = \pi(4e^0)^2 = \pi\cdot 4^2 = 16\pi$ = 50,265 FE
$A_3 = \pi(f(3))^2 = \pi(4e^{-1,5})^2 = \pi\cdot 16e^{-3} = 16\pi/e^3$ = 2,503 FE
$A_6 = \pi(f(6))^2 = \pi(4e^{-3})^2 = \pi\cdot 16e^{-6} = 16\pi/e^6$ = 0,125 FE.

Eine (numerische) Näherung für das Volumen des Rotationskörpers ist dann:

$$V = \pi \int_0^6 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^6 \left(4e^{-0,5x}\right)^2 dx \approx \frac{6-0}{6}\left[A_0 + 4A_3 + A_6\right] = 16\pi + 4\cdot\frac{16}{e^3}\pi + \frac{16}{e^6}\pi =$$

$$\frac{16}{e^6}\left(e^6 + 4e^3 + 1\right)\pi \approx 19,226\pi = 60,40 \text{ VE.}$$



b) Zur exakten <u>Volumenberechnung</u> integrieren wir das bestimmte Integral über (f(x))²:

$$V = \pi \int_0^6 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^6 \left(4x^{-0,5x}\right)^2 dx = \pi \int_0^6 16e^{-x} dx = 16\pi \int_0^6 e^{-x} dx = 16\pi \left[-e^{-x}\right]_0^6 =$$

$$16\pi\left(-e^{-6} + e^{0}\right) = 16\pi \cdot \left(1 - e^{-6}\right) \approx 15,96\pi$$ = 50,14 VE.

Die <u>prozentuale Abweichung</u> der Näherung bezogen auf den exakten Wert berechnet sich als:

$$\frac{|60,40 - 50,14|}{50,14} = \frac{10,26}{50,14} =$$ 0,2046 = 20,46 %.

Die Keplersche Fassregel liefert nur eine schlechte Näherung für das Volumenintegral der um die x-Achse rotierenden Funktion $f(x) = 4e^{-0,5x}$. Dies hängt offensichtlich damit zusammen, dass die numerische Näherung der Fassregel für zum Querschnitt der Körpermitte symmetrische „Fässer" mit Rechtskrümmung konzipiert ist; für einen „Trichter", wie er durch die rotierende monoton fallende, links gekrümmte Exponentialfunktion f(x) erzeugt wird, ist die Fassregel somit eher ungeeignet.

(FE = Flächeneinheiten, VE = Volumeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2023 / Aufgabe 1830