Michael Buhlmann

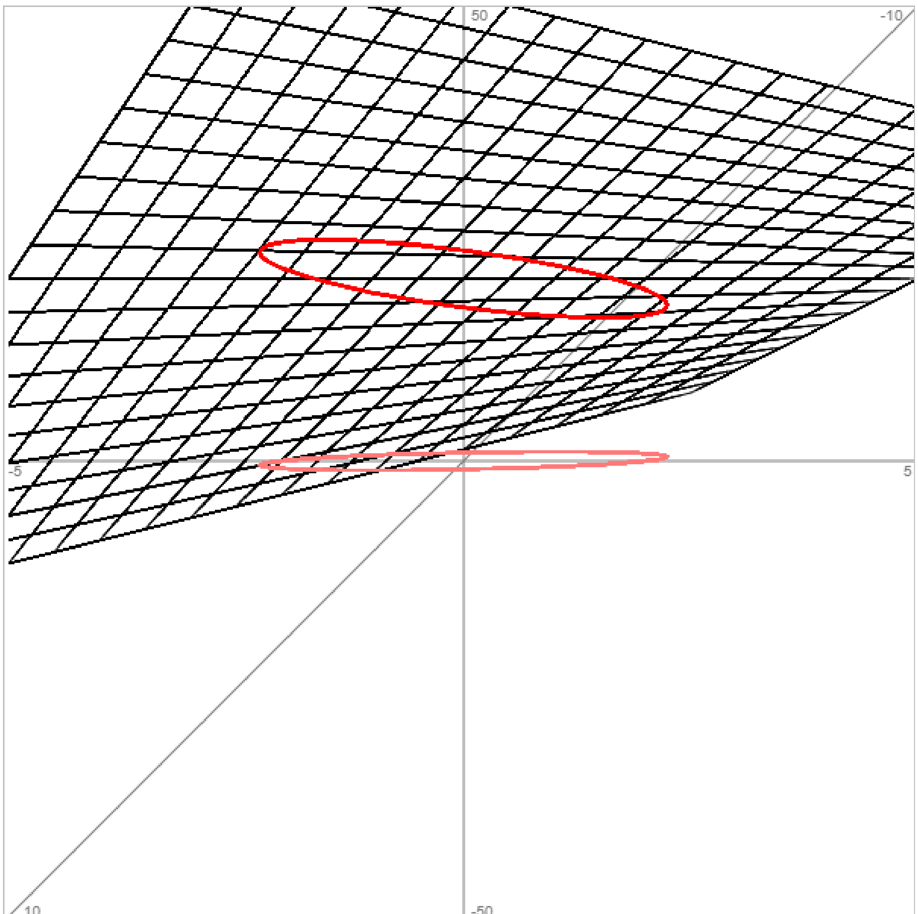
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegrale

Aufgabe: Berechne das Volumen zwischen der Ebene

$$z = f(x,y) = 20 - 2x - \frac{1}{4}y$$

und der x-y-Ebene im Kreis $x^2+y^2 \leq 4$.

Lösung: I. Wir identifizieren die Funktion $z = f(x,y) = 20 - 2x - \frac{1}{4}y$ mit zwei Unbekannten x, y als Ebene im dreidimensionalen reellen Raum über den Bereich $x^2+y^2 \leq 4$:



$z = f(x,y) = 20\text{-}2x\text{-}0{,}25y,\ x^2+y^2\leq 4$

II. Der (Integrations-) Bereich ergibt sich dabei wegen $x^2+y^2 = 4$ als Kreis der x-y-Ebene mit Mittelpunkt M(0|0) und Radius 2 und damit als: $x^2+y^2 \le 4$. Folglich führt die Transformation von kartesischen in Polarkoordinaten auf:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = 20 - 2r\cos\varphi - \frac{1}{4}r\sin\varphi$$

für $0 \le r \le 2$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$.

III. Das Volumenintegral ergibt sich gemäß dem Bereich $x^2+y^2 \le 4$ durch zweifache Integration entlang $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ als:

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(20 - 2r\cos\varphi - \frac{1}{4}r\sin\varphi\right) d\varphi \cdot r dr = \int_0^2 \left[20\varphi - 2r\sin\varphi + \frac{1}{4}r\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot r dr =$$

$$\int_0^2 \left(\left(20\cdot 2\pi - 2r\sin(2\pi) + \frac{1}{4}r\cos(2\pi)\right) - \left(20\cdot 0 - 2r\sin(0) + \frac{1}{4}r\cos(0)\right)\right) r dr =$$

$$\int_0^2 \left(40\pi + \frac{1}{4}r - \frac{1}{4}r\right) r dr = \int_0^2 40\pi r dr = \left[20\pi r^2\right]_{r=0}^{r=2} = 20\pi \cdot 2^2 - 20\pi \cdot 0^2 = 80\pi.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2303