Michael Buhlmann

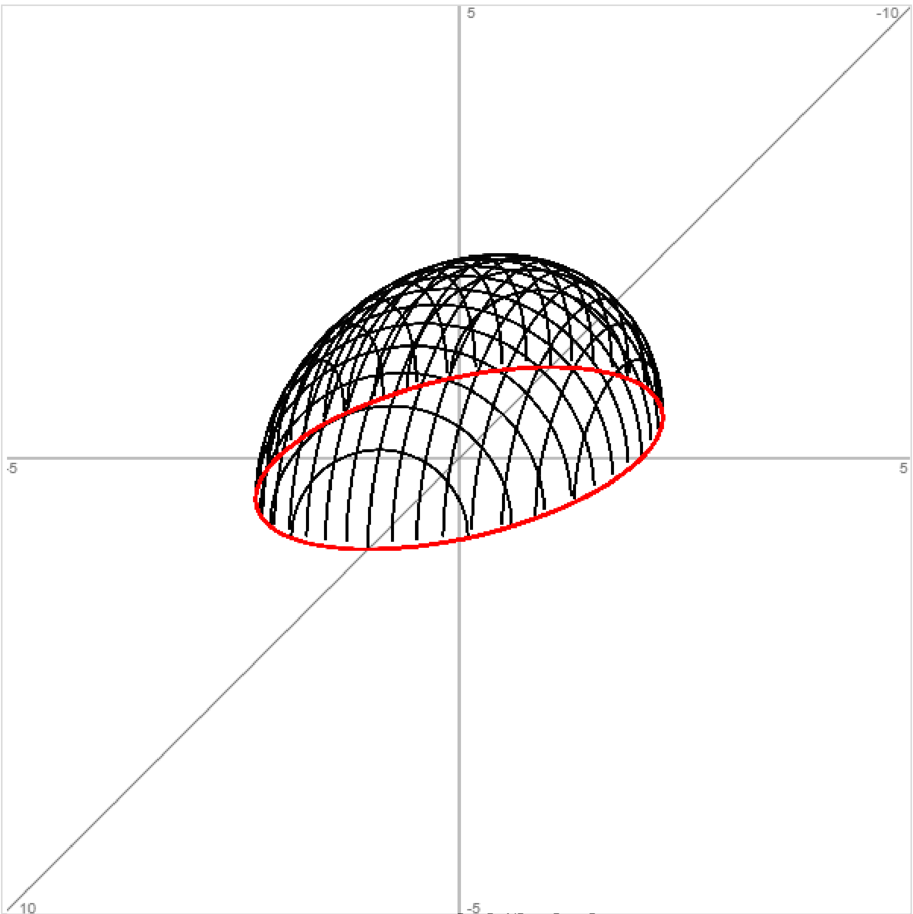
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegrale

Aufgabe: Berechne das Volumen zwischen der Funktion

$$z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

und der x-y-Ebene.

Lösung: I. Wir identifizieren die Funktion $z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ mit zwei Unbekannten x, y als Halbkugel im dreidimensionalen reellen Raum über den Bereich $x^2+y^2 \leq 4$ als Definitionsbereich von z:



$z = f(x,y) = (4-x^2-y^2)^{1/2}$, $x^2+y^2 \leq 4$

II. Der (Integrations-) <u>Bereich</u> ergibt sich dabei wegen $x^2+y^2 = 4$ als Kreis der x-y-Ebene mit Mittelpunkt M(0|0) und Radius 2 und damit als: $x^2+y^2 \le 4$. Folglich führt die Transformation von kartesischen in Polarkoordinaten auf:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = \sqrt{4-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2} = \sqrt{4-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{4-r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \sqrt{4-r^2}$$

für $0 \le r \le 2$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$.

III. Das <u>Volumenintegral</u> ergibt sich gemäß dem Bereich $x^2+y^2 \le 4$ durch zweifache Integration entlang $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ als:

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4-r^2}\, d\varphi \cdot r dr = \int_0^2 \left[\sqrt{4-r^2} \cdot \varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot r dr = \int_0^2 \left(\sqrt{4-r^2} \cdot 2\pi - \sqrt{4-r^2} \cdot 0\right) r dr =$$

$$\int_0^2 \left(2\pi\sqrt{4-r^2}\right) r dr = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \cdot r dr \underset{\left\{\begin{smallmatrix} u=4-r^2 \\ -\frac{1}{2}du = rdr \end{smallmatrix}\right\}}{=} 2\pi \int_4^0 \sqrt{z} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dz = \pi \int_0^4 \sqrt{u}\, du = \pi \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$\pi \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=0}^{u=4} = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{2}{3}\pi\sqrt{4}^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 8 = \frac{16}{3}\pi.$$

IV. Die aus der Geometrie bekannte <u>Volumenformel für Kugeln</u>: V = $\frac{4}{3}\pi r^3$ liefert für Halbkugeln mit Radius r = 2 dasselbe Ergebnis:

V = $\frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{16}{3}\pi$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2304