

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

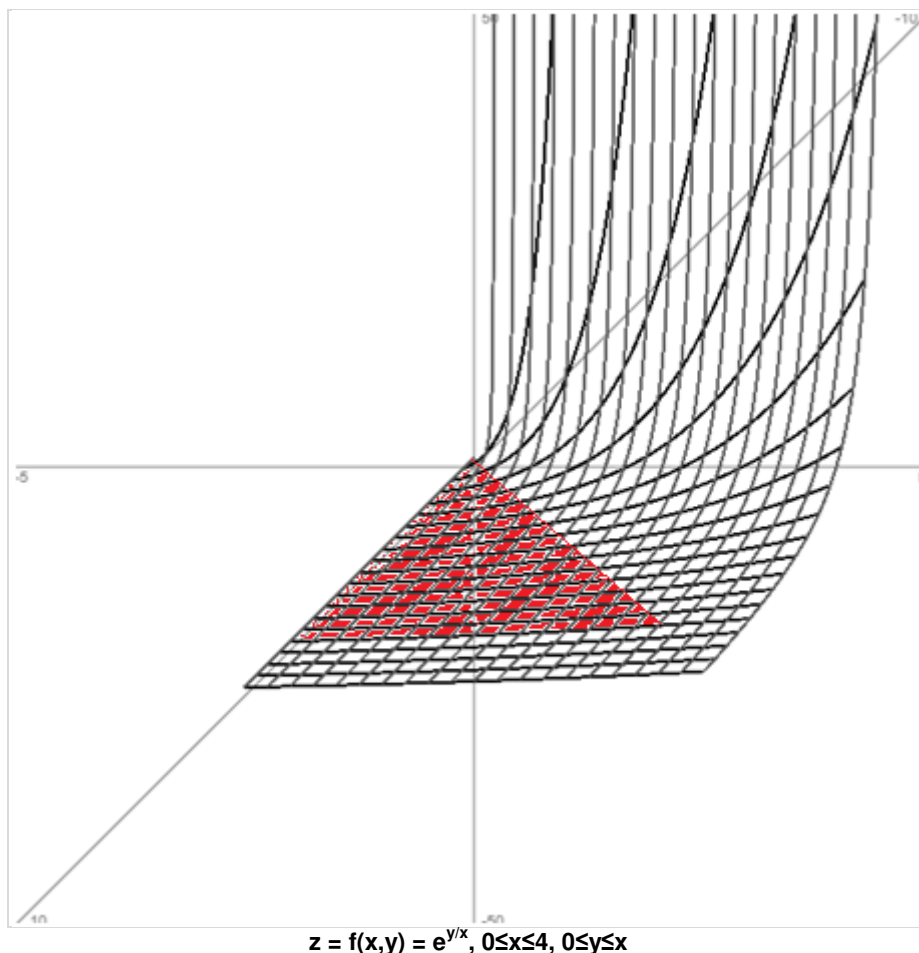
### > Volumenintegrale

**Aufgabe:** Berechne das Volumen zwischen der Funktion

$$z = f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$$

und der x-y-Ebene im Bereich  $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ .

**Lösung:** I. Wir identifizieren die Funktion  $z = f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$  mit zwei Unbekannten  $x, y$  als positive Funktion im dreidimensionalen reellen Raum über den Bereich  $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ :



II. Das Volumenintegral ergibt sich gemäß dem Bereich  $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$  in kartesischen Koordinaten durch zweifache Integration entlang  $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x$  als:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy dx = \int_0^4 \left[ x e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^4 x \left[ e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^4 x \left( e^{\frac{x}{x}} - e^0 \right) dx = \int_0^4 x(e-1) dx = \\ &= (e-1) \int_0^4 x dx = (e-1) \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=4} = (e-1) \left( \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 0 \right) = 8(e-1). \end{aligned}$$