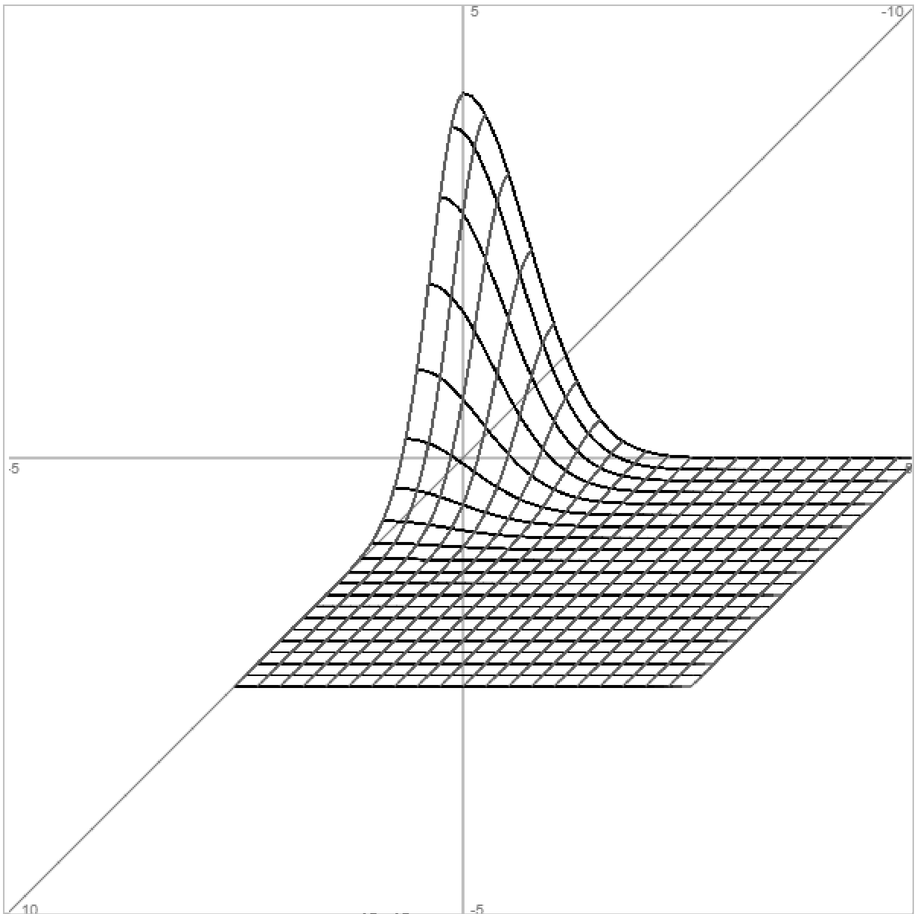
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Volumenintegrale

Aufgabe: Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty 4e^{-x^2-y^2}\,dydx.$$

Lösung: I. Wir identifizieren die Funktion z = f(x,y) = $4e^{-x^2-y^2}$ mit zwei Unbekannten x, y als positiv im dreidimensionalen reellen Raum über dem uneigentlichen „Quadrat" [0; +∞) x [0; +∞):



z = f(x,y) = $4e^{-x^2-y^2}$, 1. Quadrant der x-y-Ebene

II. Die Transformation von kartesischen in Polarkoordinaten ergibt:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = 4e^{-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2} = 4e^{-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi} = 4e^{-r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = 4e^{-r^2}$

für 0≤r≤+∞ und 0≤φ≤π/2 (Viertelkreis, dem 1. Quadranten der x-y-Ebene entsprechend).

III. Das uneigentliche Integral berechnet sich als:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty 4e^{-x^2-y^2}\,dydx = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4e^{-r^2}\,d\varphi r dr = \int_0^\infty 4e^{-r^2} r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr = \int_0^\infty 4e^{-r^2} r \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\,dr =$$

$$\int_0^\infty 4e^{-r^2} r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \underset{\left\{\begin{smallmatrix} u=-r^2 \\ -\frac{1}{2}du = rdr \end{smallmatrix}\right\}}{=} 2\pi \int_0^{-\infty} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = \pi \int_{-\infty}^0 e^u du = \pi\left[e^u\right]_{u=-\infty}^{u=0} =$$

$$\pi\left(e^0 - e^{-\infty}\right) = \pi(1-0) = \pi.$$

Hierbei haben wir „uneigentlich“ (mit unendlich) gerechnet, wobei wir die Existenz des Integrals vorausgesetzt und entsprechende Grenzwertbetrachtungen ($\int_0^\infty e^{-r^2} rdr = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-r^2} rdr$ usw.) ausgeblendet haben.

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2307