Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Vollständige Induktion

Aufgabe: Zeige mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ für alle } x \geq -1 \text{ und alle } n \in \mathbf{N}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n \in \mathbf{N}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0 \in \mathbf{N}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbf{N}$.

II. Induktionsbeweis der Bernoullischen Ungleichung:

Behauptung: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbf{N}$.
Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $(1+x)^1 = 1+x = 1+1\cdot x$ für alle $x \geq -1$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $(1+x)^k \geq 1+kx$ für alle x>-1 sei eine wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ für alle $x \geq -1$, als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir bilden eine Ungleichungskette, in der an wichtiger Stelle die Induktionsannahme (*) einfließt sowie die Tatsache, dass $kx^2 \geq 0$ für alle $x \geq -1$ bei (positivem) $k \in \mathbf{N}$ gilt. Es ergibt sich:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \overset{(*)}{\geq} (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \overset{kx^2\geq 0}{\geq}$$
$$1+(k+1)x+0 = 1+(k+1)x$$

Die Induktionsbehauptung erweist sich also als wahr, wenn die Induktionsannahme richtig ist.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle $n \in \mathbf{N}$.

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 52