Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Vollständige Induktion

Aufgabe: Beweise die folgende Ungleichung:

$a^n \geq na$ für alle reellen a≥2 und alle nε**N**.

1. Lösung (vollständige Induktion): I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0$ ε**N** (meist n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

II. Induktionsbeweis der Ungleichung:

Behauptung: $a^n \geq na$ für alle reellen a≥2 und alle nε**N**.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $a^1 = a = 1 \cdot a$ für alle a≥2 als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $a^k \geq ka$ für alle a≥2 sei eine wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $a^{k+1} \geq (k+1)a$ für alle a≥2, als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir bilden eine Ungleichungskette, in der an wichtiger Stelle die Induktionsannahme (*) einfließt sowie die Tatsache, dass

$a \geq 2 \geq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k}{k} + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ für alle kε**N** (**)

ist. Es ergibt sich:

$$a^{k+1} = a^k \cdot a \overset{(*)}{\geq} ka \cdot a \overset{(**)}{\geq} ka \cdot \frac{k+1}{k} = a(k+1) = (k+1)a \,.$$

Die Induktionsbehauptung erweist sich also als wahr, wenn die Induktionsannahme richtig ist und weil (**) gilt.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle nε**N**.

2. Lösung (Differenzfunktion): I. Wir beweisen im Folgenden die Beziehung

$a^n \geq na$ für alle reellen a≥e und alle nε**N**.

Nun gehen wir von natürlichen Zahlen zu den reellen Zahlen über und bilden die auf den ganzen reellen Zahlen definierte Differenzfunktion der Terme der linken und rechten Seite der Ungleichung $a^x \geq ax$ mit:

$h(x) = a^x - ax = e^{x\ln(a)} - ax$.

Deren 1. Ableitung ist nach Summen- und Kettenregel:

$h'(x) = \ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} - a = a^x \cdot \ln(a) - a$.

II. Wir zeigen, dass die 1. Ableitung h'(x) nichtnegativ für alle reellen $x \geq 1$ ist. Zunächst gilt wegen $a \geq e$ und nach dem Verhalten für Potenzen bei $x \geq 1$, also $x-1 \geq 0$:

$a^{x-1} \geq 1$.

Weiter ist wegen $a \geq e$ und der steigenden Monotonie der natürlichen Logarithmusfunktion $y = \ln(x)$:

$\ln(a) \geq \ln(e) = 1$.

Wir erhalten damit die Abschätzung:

$h'(x) = a^x \cdot \ln(a) - a = a(a^{x-1} \cdot \ln(a) - 1) \geq a(1 \cdot 1 - 1) = a(1-1) = a \cdot 0 = 0$

und folglich das Gewünschte.

III. Da die 1. Ableitung h'(x) nichtnegativ für alle reellen $x \geq 1$ ist, muss die Differenzfunktion h(x) dort monoton steigend sein. Da nun $h(1) = a^1 - 1 \cdot a = a - a = 0$ gilt, die Differenzfunktion mithin an der Stelle $x=1$ eine Nullstelle hat, folgt also:

$1 \leq x \Rightarrow 0 = h(1) \leq h(x) = a^x - ax \Rightarrow 0 \leq a^x - ax$.

Somit ist h(x) nichtnegativ für alle $x \geq 1$, woraus weiter folgt:

$a^x - ax \geq 0 \Rightarrow a^x \geq ax$.

IV. Da $a^x \geq ax$ für alle reellen $x \geq 1$ gilt, ergibt sich die Beziehung erst recht für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Es ist also das Beweisende als richtig erkannt:

$a^n \geq na$ für alle reellen $a \geq e$ und alle $n \in \mathbf{N}$

V. Die gewisse Einschränkung $a \geq e$ gegenüber $a \geq 2$ der Aufgabenstellung ergibt sich aus der notwendigen, hier gebrauchten Abschätzung $\ln(a) \geq \ln(e) = 1$.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1174