Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Vollständige Induktion

Aufgabe: Beweise die folgende Ungleichung:

$$3^n > 2n^2 \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N_0}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** bzw. nε$\mathbf{N_0}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=k_0ε**N** bzw. k_0ε$\mathbf{N_0}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

II. Induktionsbeweis der Ungleichung:

<u>Behauptung</u>: $3^n > 2n^2$ für alle nε$\mathbf{N_0}$.

<u>Beweis</u>:

1) *Induktionsanfang*: n=0 mit: $3^0 = 1 > 0 = 2 \cdot 0^2$ als wahre Aussage; n=1 mit $3^1 = 3 > 2 = 2 \cdot 1^2$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $3^k > 2k^2$ sei eine wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $3^{k+1} \geq 2(k+1)^2$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir bilden eine Ungleichungskette, in der an wichtiger Stelle die Induktionsannahme (*) einfließt sowie die Tatsache, dass 3k ≤ 3^k für alle kε$\mathbf{N_0}$ (**) gilt:

$$2(k+1)^2 = 2(k^2+2k+1) = 2k^2+4k+2 \overset{(*)}{<} 3^k+4k+2 = 3^k+2(2k+1) \overset{k\geq 1}{\leq} 3^k+2(2k+k) =$$

$$3^k + 2\cdot 3k \overset{(**)}{\leq} 3^k + 2\cdot 3^k = 3\cdot 3^k = 3^{k+1}.$$

Die Induktionsbehauptung erweist sich also als wahr, wenn die Induktionsannahme richtig ist und weil (**) gilt.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=0 bzw. n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle nε$\mathbf{N_0}$.

III. Wir zeigen noch die Richtigkeit der Aussage (**):

3n ≤ 3^n für alle nε$\mathbf{N_0}$

ebenfalls mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion. Es gilt:

<u>Behauptung</u>: $3n \leq 3^n$ für alle nε$\mathbf{N_0}$.

<u>Beweis</u>:

1) *Induktionsanfang*: n=0 mit: $3\cdot 0 = 0 \leq 1 = 3^0$ als wahre Aussage; n=1 mit: $3\cdot 1 = 3 \leq 3 = 3^1$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $3k \leq 3^k$ sei eine wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $3(k+1) \leq 3^{k+1}$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir bilden eine Ungleichungskette, in der an wichtiger Stelle die Induktionsannahme (*) einfließt:

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \overset{(*)}{\geq} 3k \cdot 3 \overset{k \geq 1}{>} 3k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 3k \cdot \frac{k+1}{k} = 3(k+1).$$

Die Induktionsbehauptung erweist sich also als wahr, wenn die Induktionsannahme richtig ist.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=0, sondern auch für n=1, weiter für n=2 usw., mithin für alle n$\varepsilon$$\mathbf{N_0}$.

(Mengen der natürlichen Zahlen: **N** = {1, 2, 3, …}, $\mathbf{N_0}$ = {0, 1, 2, …})

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1175