**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Zahlentheorie
## > Vollständige Induktion

---

**Aufgabe**: Beweise:

$$5 \mid 4^n - (-1)^n \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

**Lösung**: I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen n$\varepsilon$**N** bzw. n$\varepsilon\mathbf{N_0}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=$k_0\varepsilon$**N** bzw. $k_0\varepsilon\mathbf{N_0}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen n$\varepsilon$**N**.

II. Induktionsbeweis der Teilbarkeitsregel:

Behauptung: $5 \mid 4^n - (-1)^n$ für alle n$\varepsilon$**N**.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=0 mit: $4^1 - (-1)^1 = 4 + 1 = 5$ als wahre Aussage wegen: 5 **|** 5.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $5 \mid 4^k - (-1)^k$ sei eine wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $5 \mid 4^{k+1} - (-1)^{k+1}$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir formen den Term $4^{k+1} - (-1)^{k+1}$ wie folgt um:

$$4^{k+1} - (-1)^{k+1} = 4^k \cdot 4 - (-1)^k \cdot (-1) = 4^k \cdot 4 + (-1)^k = 4^k \cdot (5-1) + (-1)^k =$$
$$5 \cdot 4^k - 4^k + (-1)^k = 5 \cdot 4^k - \left(4^k (-1)^k\right)$$

Da $5 \mid 5 \cdot 4^k$ und $5 \mid 4^k - (-1)^k$ nach (*) gilt, folgt für Differenz $5 \mid 5 \cdot 4^k - \left(4^k (-1)^k\right)$. Es ergibt sich damit die Induktionsbehauptung: $5 \mid 4^{k+1} - (-1)^{k+1}$.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=0 bzw. n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle n$\varepsilon$**N**.

(a **|** b = a teilt b, a, b$\varepsilon$**N**; Menge der natürlichen Zahlen: **N** = {1, 2, 3, …})

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1281