Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Vollständige Induktion

Aufgabe: Beweise: Zur Funktion f(x) = x·sin(ax) berechnen sich die Ableitungen wie folgt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} na^{n-1}\sin(ax) + a^n x\cos(ax) & (n = 4\nu + 1) \\ na^{n-1}\cos(ax) - a^n x\sin(ax) & (n = 4\nu + 2) \\ -na^{n-1}\sin(ax) - a^n x\cos(ax) & (n = 4\nu + 3) \\ -na^{n-1}\cos(ax) + a^n x\sin(ax) & (n = 4\nu + 4) \end{cases}$$

mit einem gewissen v = 0, 1, … für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

Lösung: I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$ bzw. $n\varepsilon\mathbf{N_0}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0\varepsilon\mathbf{N}$ bzw. $k_0\varepsilon\mathbf{N_0}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$.

II. Induktionsbeweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit der 1. Ableitung gemäß der Produktregel bei v=0:
$f'(x) = 1\cdot\sin(ax) + x\cdot a\cos(ax) = \sin(ax) + ax\cos(ax) = 1\cdot a^0\cdot\sin(ax) + a^1\cdot x\cdot\cos(ax)$.

2) *Induktionsannahme* für n=k: Es gilt für ein gewisses v=0, 1,…:

$$f^{(k)}(x) = \left\{\begin{matrix} ka^{k-1}\sin(ax) + a^k x\cos(ax) & (k = 4\nu + 1) \\ ka^{k-1}\cos(ax) - a^k x\sin(ax) & (k = 4\nu + 2) \\ -ka^{k-1}\sin(ax) - a^k x\cos(ax) & (k = 4\nu + 3) \\ -ka^{k-1}\cos(ax) + a^k x\sin(ax) & (k = 4\nu + 4) \end{matrix}\right\} (*).$$

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: Es ist als wahr zu beweisen für v=0, 1,…:

$$f^{(k+1)}(x) = \left\{\begin{matrix} (k+1)a^k\sin(ax) + a^{k+1} x\cos(ax) & (k = 4\nu + 4) \\ (k+1)a^k\cos(ax) - a^{k+1} x\sin(ax) & (k = 4\nu + 5) \\ -(k+1)a^k\sin(ax) - a^{k+1} x\cos(ax) & (k = 4\nu + 6) \\ -(k+1)a^k\cos(ax) + a^{k+1} x\sin(ax) & (k = 4\nu + 7) \end{matrix}\right\} (**).$$

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1:
Es sei k=4v+4, so dass nach Induktionsannahme (*) $f^{(k)}(x) = -ka^{k-1}\cos(ax) + a^k x\sin(ax) = f^{(4v+4)}(x) = -(4v+4)a^{4v+3}\cos(ax) + a^{4v+4}x\sin(ax)$ gilt. Dann folgt u.a. mit der Produktregel für k+1=4v+5 ⇔ k=4v+4:
$f^{(k+1)}(x) = f^{(4v+5)}(x) = -(4v+4)a^{4v+3}\cdot(-a\sin(ax)) + a^{4v+4}\sin(ax) + a^{4v+4}x\cdot a\cos(ax) =$
$(4v+4)a^{4v+4}\sin(ax) + a^{4v+4}\sin(ax) + a^{4v+5}x\cdot\cos(ax) = (4v+5)a^{4v+4}\sin(ax) + a^{4v+5}x\cdot\cos(ax) =$
$(k+1)a^k\sin(ax) + a^{k+1}x\cos(ax)$

und damit das Gewünschte (**).

Für $k+1=4v+6 \Leftrightarrow k=4v+5$ gilt nach dem eben Bewiesenen: $f^{(k)}(x) = ka^{k-1}\sin(ax) + a^k x\cos(ax) = f^{(4v+5)}(x) = (4v+5)a^{4v+4}\sin(ax) + a^{4v+5}x\cos(ax)$, so dass sich u.a. nach der Produktregel ergibt:

$f^{(k+1)}(x) = f^{(4v+6)}(x) = (4v+5)a^{4v+4}\cdot a\cos(ax) + a^{4v+5}\cdot\cos(ax) + a^{4v+5}x\cdot(-a\sin(ax)) =$
$(4v+5)a^{4v+5}\cos(ax) + a^{4v+5}\cos(ax) - a^{4v+6}x\sin(ax) = (4v+6)a^{4v+5}\cos(ax) - a^{4v+6}x\sin(ax) =$
$(k+1)a^k\cos(ax) - a^{k+1}x\sin(ax)$

und damit (**).

Für $k+1=4v+7 \Leftrightarrow k=4v+6$ gilt nach dem eben Bewiesenen: $f^{(k)}(x) = ka^{k-1}\cos(ax) - a^k x\sin(ax) = f^{(4v+6)}(x) = (4v+6)a^{4v+5}\cos(ax) - a^{4v+6}x\sin(ax)$, so dass sich u.a. nach der Produktregel ergibt:

$f^{(k+1)}(x) = f^{(4v+7)}(x) = (4v+6)a^{4v+5}\cdot(-a\sin(ax)) - a^{4v+6}\cdot\sin(ax) - a^{4v+6}x\cdot a\cos(ax) =$
$-(4v+6)a^{4v+6}\sin(ax) - a^{4v+6}\sin(ax) - a^{4v+6}x\cos(ax) = -(4v+7)a^{4v+6}\sin(ax) - a^{4v+6}x\cos(ax) =$
$-(k+1)a^k\sin(ax) - a^{k+1}x\cos(ax)$

und damit (**).

Für $k+1=4v+8 \Leftrightarrow k=4v+7$ gilt nach dem eben Bewiesenen: $f^{(k)}(x) = -ka^{k-1}\sin(ax) - a^k x\cos(ax) = f^{(4v+7)}(x) = -(4v+7)a^{4v+6}\sin(ax) - a^{4v+7}x\cos(ax)$, so dass sich u.a. nach der Produktregel ergibt:

$f^{(k+1)}(x) = f^{(4v+8)}(x) = -(4v+7)a^{4v+6}\cdot a\cos(ax) - a^{4v+7}\cdot\cos(ax) - a^{4v+7}x\cdot(-a\sin(ax)) =$
$-(4v+7)a^{4v+7}\cos(ax) - a^{4v+7}\cos(ax) + a^{4v+8}x\sin(ax) = -(4v+8)a^{4v+7}\cos(ax) + a^{4v+8}x\sin(ax) =$
$-(k+1)a^k\cos(ax) + a^{k+1}x\sin(ax)$

und damit (**).

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle $n \in \mathbf{N}$.

III. Beispiele: a) Die Funktion $f(x) = x\cdot\sin(x)$ besitzt als erste zehn Ableitungen:

$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$
$f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$
$f'''(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$
$f^{(4)}(x) = -4\cos(x) + x\sin(x)$
$f^{(5)}(x) = 5\sin(x) + x\cos(x)$
$f^{(6)}(x) = 6\cos(x) - x\sin(x)$
$f^{(7)}(x) = -7\sin(x) - x\cos(x)$
$f^{(8)}(x) = -8\cos(x) + x\sin(x)$
$f^{(9)}(x) = 9\sin(x) + x\cos(x)$
$f^{(10)}(x) = 10\cos(x) - x\sin(x)$

b) Die Funktion $f(x) = x\cdot\sin(2x)$ hat als Ableitungen:

$f^{(7)}(x) = -7\cdot 2^6\cdot\sin(2x) - 2^7\cdot x\cos(2x) = -448\cdot\sin(2x) - 128\cdot x\cos(2x)$ (<- $7 = 4\cdot 1+3$)
$f^{(16)}(x) = -16\cdot 2^{15}\cdot\cos(2x) + 2^{16}\cdot x\sin(2x) = -524288\cdot\cos(2x) + 65536\cdot x\sin(2x)$ (<- $16 = 4\cdot 3+4$)
$f^{(21)}(x) = 21\cdot 2^{20}\cdot\sin(2x) + 2^{21}\cdot x\cos(2x) = 22020096\cdot\sin(2x) + 2097152\cdot x\cos(2x)$ (<- $21 = 4\cdot 5+1$)

(Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$)

www.michael-buhlmann.de / 09.2022 / Aufgabe 1680