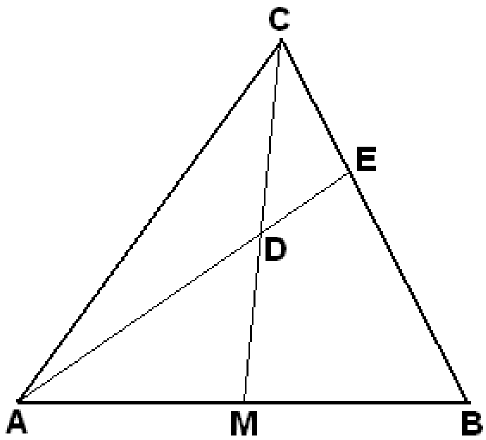
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Beweis

Aufgabe: D ist der Mittelpunkt der Seitenhalbierenden von AB. Die Gerade durch A und D schneidet BC in E. In welchem Verhältnis teilt D die Strecke AE und E die Seite BC?



Lösung: Bei zweidimensionalen geometrischen Problemen führen wir alles auf zwei Vektoren, hier auf $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ zurück. Dann ist:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

sowie:

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right) = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Wir bestimmen die Gerade durch A und D als:

g_1: $\vec{x} = t_1\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$

und die Gerade durch B und C als:

g_2: $\vec{x} = \vec{a} + t_2\vec{b}$.

Der Schnittpunkt E errechnet sich durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen als:

$$t_1\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a} + t_2\vec{b} \Leftrightarrow \frac{3}{4}t_1\vec{a} + \frac{1}{2}t_1\vec{b} = \vec{a} + t_2\vec{b}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (die Vektoren gehen in verschiedene Richtungen) müssen die Zahlen vor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf der linken und auf der rechten Seite der obigen Gleichung übereinstimmen, also:

$\frac{3}{4}t_1 = 1,\ \frac{1}{2}t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 = \frac{4}{3},\ t_2 = \frac{2}{3}$

Somit gilt für den Schnittpunkt E:

$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Dies bedeutet: E teilt die Strecke BC im Verhältnis $\frac{2}{3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$. Es gilt weiter für den Schnittpunkt E:

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$,

D teilt daher die Strecke AE im Verhältnis: $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{3} : \frac{4}{3}$ = 3:4.

08.2014 / Aufgabe 43