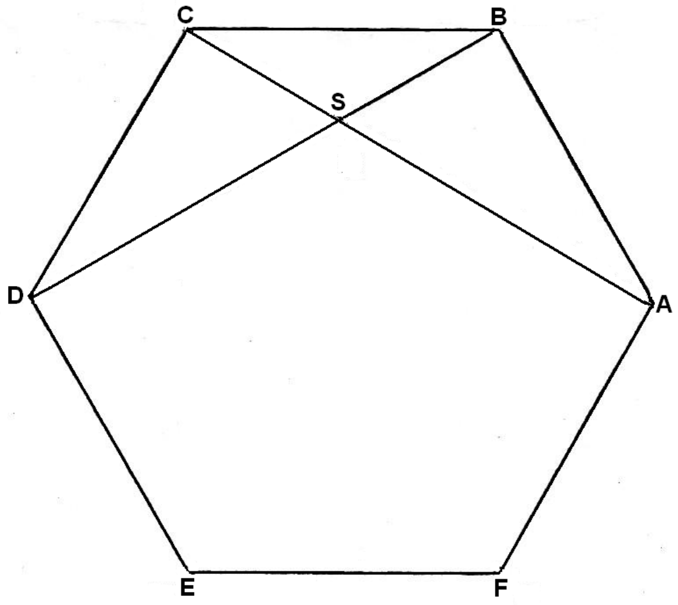
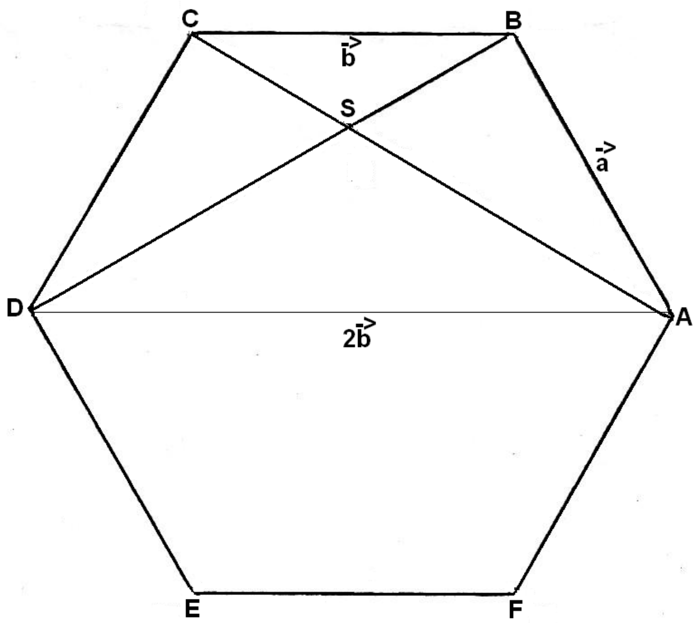
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Beweis

Aufgabe: Gegeben ist das regelmäßige Sechseck ABCDEF. In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken AC und BD?



Lösung: Bei zweidimensionalen geometrischen Problemen führen wir alles auf zwei Vektoren, hier auf $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ zurück. Also ergänzen wir das Sechseck zu:



Dann ist im die obere Hälfte des Sechsecks ausmachenden Trapez ABCD weiter: $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$ auf Grund der Tatsache, dass ein regelmäßiges Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht. A sei nun der Ursprung eines fiktiven Koordinatensystems. Die Gerade durch A und C hat die Geradengleichung g: $\vec{x} = r \cdot \vec{AC} = r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r\,\vec{a} + r\,\vec{b}$,

die Gerade durch B und D die Gleichung:

h: $\vec{x} = \vec{AB} + s \cdot \vec{BD} = \vec{a} + s \cdot (2\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + 2s\,\vec{b} - s\,\vec{a}$.

Wir bestimmen den Schnittpunkt {S} = g ∩ h durch Gleichsetzen der beiden Geraden, also:

$r\,\vec{a} + r\,\vec{b} = \vec{a} + 2s\,\vec{b} - s\,\vec{a} \Leftrightarrow r\,\vec{a} + s\,\vec{a} - \vec{a} + r\,\vec{b} - 2s\,\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow (r+s-1)\,\vec{a} + (r-2s)\,\vec{b} = \vec{0}$ (*)

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind offensichtlich linear unabhängig (zeigen in verschiedene Richtungen auf Grund des Sechsecks). Daher müssen in der Gleichung (*) die Koeffizienten vor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ jeweils Null sein. Wir erhalten damit das lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten r und s:

r + s – 1 = 0, r – 2s = 0 ⇔ r + s = 1, r – 2s = 0 ⇔ r + s = 1, r = 2s ⇔

2s + s = 1, r = 2s ⇔ 3s = 1, r = 2s ⇔ s = $\frac{1}{3}$, r = $\frac{2}{3}$.

Der Schnittpunkt S liegt also auf der Geraden g bei zwei Drittel der Strecke $\overline{AC}$, so dass die Strecke im Verhältnis $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$ geteilt wird. Dasselbe gilt für die Strecke $\overline{BD}$, wo S bei ein Drittel dieser Strecke auf der Geraden h liegt.

08.2014 / Aufgabe 44