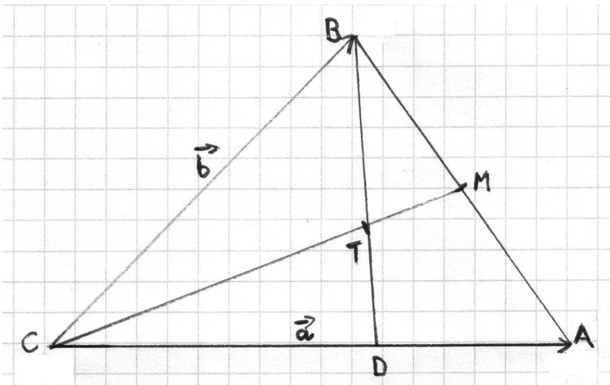
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Beweis

Aufgabe: In einem Dreieck ABC ist M der Mittelpunkt der Seite AB. Der Punkt T teilt die Strecke CM im Teilverhältnis t, d.h. $\vec{CT} = t \cdot \vec{TM}$. In welchem Verhältnis teilt dann der Punkt T die Strecke BD?



1. Lösung: Wir wenden die Methode des geschlossenen Vektorzugs auf das Dreieck ΔCDT an und betrachten die Vektoren $\vec{CD}$, $\vec{DT}$ und $\vec{TC}$, für die gilt:

$\vec{CD} + \vec{DT} + \vec{TC} = \vec{O}$ (*).

Wir drücken die Vektoren $\vec{CD}$, $\vec{DT}$ und $\vec{TC}$ durch die Vektoren $\vec{a} = \vec{CA}$ und $\vec{b} = \vec{CB}$ aus und erhalten:

$$\vec{CD} = r\,\vec{a},$$

$$\vec{DT} = s\,\vec{DB} = s(\vec{CB} - \vec{CD}) = s(\vec{b} - r\,\vec{a}),$$

$$-\vec{TC} = \vec{CT} = \vec{CM} - \vec{TM} = \vec{CM} - \frac{1}{t+1}\vec{CM} = \frac{t+1}{t+1}\vec{CM} - \frac{1}{t+1}\vec{CM} = \frac{t}{t+1}\vec{CM} = \frac{t}{2(t+1)}(\vec{a} + \vec{b}),$$

Letzteres auf Grund des Teilverhältnisses $\vec{CT} = t \cdot \vec{TM}$ und: $\vec{CT} + \vec{TM} = \vec{CM}$, d.h. wegen:

$$t \cdot \vec{TM} + \vec{TM} = \vec{CM} \Leftrightarrow (t+1) \cdot \vec{TM} = \vec{CM} \Leftrightarrow \vec{TM} = \frac{1}{t+1}\vec{CM} = \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

da M der Mittelpunkt der Seite AB ist. Laut (*) und wegen $\vec{TC} = -\vec{CT}$ muss gelten:

$$r\,\vec{a} + s(\vec{b} - r\,\vec{a}) - \frac{t}{2(t+1)}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{O} \text{ (**)}.$$

Wir sortieren nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und erhalten:

$$\left(r - sr - \frac{t}{2(t+1)}\right)\vec{a} + \left(s - \frac{t}{2(t+1)}\right)\vec{b} = \vec{0},$$

so dass sich wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ das folgende Gleichungssystem ergibt:

$r - sr - \frac{t}{2(t+1)}$ = 0, $s - \frac{t}{2(t+1)}$ = 0

Aus der zweiten Gleichung des Gleichungssystems folgt:

s = $\frac{t}{2(t+1)}$,

d.h.:

$$\vec{DT} = \frac{t}{2(t+1)} \vec{DB}$$

Für das Teilverhältnis entlang der Strecke DB erhalten wir aus:

$$\vec{TB} = \vec{DB} - \vec{DT} = \vec{DB} - \frac{t}{2(t+1)} \vec{DB} = \left(1 - \frac{t}{2(t+1)}\right) \vec{DB} = \frac{2(t+1)-t}{2(t+1)} \vec{DB} = \frac{t+2}{2(t+1)} \vec{DB}$$

und damit aus $\vec{DB} = \frac{2(t+1)}{t+2} \vec{TB}$:

$$\vec{DT} = \frac{t}{2(t+1)} \vec{DB} = \frac{t}{2(t+1)} \cdot \frac{2(t+1)}{t+2} \vec{TB} = \frac{t}{t+2} \vec{TB}$$ oder: $\vec{TB} = \frac{t+2}{t} \vec{DT}$,

woraus das Teilverhältnis $\frac{t+2}{t}$ folgt. Für t = 2 z.B. beträgt das Teilverhältnis $\frac{2+2}{2} = 2$.

2. Lösung: Wir wenden die Methode des geschlossenen Vektorzugs auf das Dreieck ΔTMB an und betrachten die Vektoren $\vec{TM}$, $\vec{MB}$ und $\vec{BT}$, für die gilt:

$\vec{TM} + \vec{MB} + \vec{BT} = \vec{O}$ (*).

Wir drücken die Vektoren $\vec{TM}$, $\vec{MB}$ und $\vec{BT}$ durch die Vektoren $\vec{a} = \vec{CA}$ und $\vec{b} = \vec{CB}$ aus und erhalten:

$$\vec{MB} = \frac{1}{2} \vec{AB} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\vec{CD} = r\,\vec{a},$$

$$\vec{BT} = s\,\vec{BT} = s(\vec{CD} - \vec{CB}) = s(r\,\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\vec{TM} = \frac{1}{t+1} \vec{CM} = \frac{1}{2(t+1)} (\vec{a} + \vec{b}),$$

Letzteres auf Grund des Teilverhältnisses $\vec{CT} = t \cdot \vec{TM}$ und: $\vec{CT} + \vec{TM} = \vec{CM}$, d.h. wegen:

$$t \cdot \vec{TM} + \vec{TM} = \vec{CM} \Leftrightarrow (t+1) \cdot \vec{TM} = \vec{CM} \Leftrightarrow \vec{TM} = \frac{1}{t+1} \vec{CM} = \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}),$$

da M der Mittelpunkt der Seite AB ist. Laut (*) muss gelten:

$\frac{1}{2(t+1)} (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) + s(r\,\vec{a} - \vec{b}) = \vec{O}$ (**).

Wir sortieren nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und erhalten:

$$\left(\frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2} + sr\right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2} - s\right) \vec{b} = \vec{0},$$

so dass sich das folgende Gleichungssystem ergibt:

$\frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2} + sr$ = 0, $\frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2} - s$ = 0

Aus der zweiten Gleichung des Gleichungssystems folgt:

s = $\frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{t+1}{2(t+1)} = \frac{t+2}{2(t+1)}$,

d.h.:

$$\overrightarrow{BT} = \frac{t+2}{2(t+1)}\overrightarrow{DB}$$

Für das Teilverhältnis entlang der Strecke DB erhalten wir aus:

$$\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{DB} - \frac{t+2}{2(t+1)}\overrightarrow{DB} = \left(1 - \frac{t+2}{2(t+1)}\right)\overrightarrow{DB} = \frac{2(t+1)-t-2}{2(t+1)}\overrightarrow{DB} = \frac{t}{2(t+1)}\overrightarrow{DB}$$

und damit aus $\overrightarrow{DB} = \frac{2(t+1)}{t}\overrightarrow{TD}$:

$$\overrightarrow{BT} = \frac{t+2}{2(t+1)}\overrightarrow{DB} = \frac{t+2}{2(t+1)} \cdot \frac{2(t+1)}{t}\overrightarrow{TD} = \frac{t+2}{t}\overrightarrow{TD},$$

woraus das Teilverhältnis $\frac{t+2}{t}$ folgt.

08.2014 / Aufgabe 45