Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Beweis

Aufgabe: Zeige oder widerlege: Jede Ebene im dreidimensionalen Vektorraum enthält einen Punkt mit gleichen x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten.

Lösung: I. Wir führen die nachfolgende Überlegung an: Es sei im Vektorraum eine beliebige Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (a, b, c, d reell mit mindestens $a \neq 0$, $b \neq 0$ oder $c \neq 0$) in Koordinatenform gegeben, ebenso der Punkt P(p|p|p) (p reell). Einsetzen des Punktes P in die Ebenengleichung E führt dann auf:

$$ap + bp + cp = d \Leftrightarrow (a+b+c)p = d \Leftrightarrow p = \frac{d}{a+b+c},$$

sofern $a + b + c \neq 0$ gilt. Im Fall $a + b + c = 0$ gibt es indes keine Lösung für p, d.h.: Ebenen E, die der Bedingung $a + b + c = 0$ bei $d \neq 0$ genügen, besitzen einen solchen Punkt P nicht. Ist d=0, so verläuft die Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ durch den Ursprung des Koordinatensystems, der damit den Punkt P(0|0|0) darstellt.

II. Wir ergänzen das bisher Gesagte durch Beispiele:

a) Zur Ebene E: $2x_1 + x_2 – 2x_3 = 10$ ist P(10|10|10) der Punkt mit gleichen x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten auf Grund von: p = 10/(2+1-2) = 10.

b) Die Ebene E: $2x_1 + x_2 – 3x_3 = 0$ besitzt trotz 2 + 1 – 3 = 0 den Koordinatenursprung als P(0|0|0).

c) Die Ebene E: $2x_1 + x_2 – 3x_3 = 10$ hat keinen Punkt mit gleichen x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten, denn mit P(p|p|p) folgt nach dem Einsetzen in E: 2p + p – 3p = 0 = 10, was zum Widerspruch führt.

d) Auch die Ebene E: $x_1 – x_2 = -4$ besitzt keinen Punkt mit gleichen x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten.

III. Immerhin erweist sich der folgende Sachverhalt als wahr: Jede Ebene im dreidimensionalen Vektorraum enthält einen Punkt mit x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten, deren Beträge gleich sind. D.h. es gilt für eine beliebige Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (a, b, c, d reell mit mindestens $a \neq 0$, $b \neq 0$ oder $c \neq 0$) in Koordinatenform, dass auch im Fall $a + b + c = 0$ bei $d \neq 0$ ein Punkt P(p|p|-p), P(p|-p|p) oder P(-p|p|p) mit |p| = |-p| auf der Ebene liegt. Diese drei Fälle genügen im Übrigen. Denn wegen der Koordinatenform der Ebene E muss $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$ gelten. Ist z.B. $c \neq 0$, so betrachten wir den Punkt P(p|p|-p), so dass gilt:

$$ap + bp – cp = d \Leftrightarrow (a+b-c)p = d \Leftrightarrow \frac{d}{a+b-c},$$

wobei aus: $a + b + c = 0$ folgt: $a + b – c \neq 0$. Denn wäre $a + b – c = 0$, so auch $a + b = 0$ (Addition der Gleichungen $a + b + c = 0$, $a + b – c = 0$) und damit $c = 0$, woraus einen Widerspruch folgt. Ist $b \neq 0$, so gilt Entsprechendes für den Punkt P(p|-p|p); bei $a \neq 0$ ist der Punkt P(-p|p|p) zu betrachten.

IV. Auch hierzu führen wir Beispiele an:

a) Bzgl. der Ebene E: $2x_1 + x_2 – 3x_3 = 10$ gilt 2 + 1 – 3 = 0, so dass kein Punkt P(p|p|p) mit gleichen x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten existiert. Setzen wir hingegen P(p|p|-p) an, so gilt gemäß der Ebenengleichung von E: 2p + p – 3(-p) = 2p + p +3p = 6p = 10 und damit p = 10/6 = 5/3; der gefundene Punkt P(5/3|5/3|-5/3) zeichnet sich also durch gleiche Beträge der x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten aus.

b) Ähnlich ergeben sich für die Ebene E: $x_1 – x_2 = -4$ die Punkte P(-2|2|2), P(-2|2|-2).

c) Geometrisch bedeutet die Existenz von Punkten P(p|p|-p), P(p|-p|p) bzw. P(-p|p|p) auf einer beliebigen Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ im dreidimensionalen Vektorraum, dass Ursprungsgeraden vom Typ g: $\vec{x} = p\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ die Ebene schneiden. Diese Geraden sind die „Winkelhalbierenden“ der acht Oktanten des dreidimensionalen Vektorraums.

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Aufgabe 1870