Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Beweis

Aufgabe: Beweise die Additionstheoreme für die Sinus- und die Kosinusfunktion:

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$$
$$\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$$
$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$
$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi$$

für beliebige Winkel φ, ψ.

Lösung: I. Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und die Berechnung des Skalarprodukts (im Zweidimensionalen) gilt die Formel:

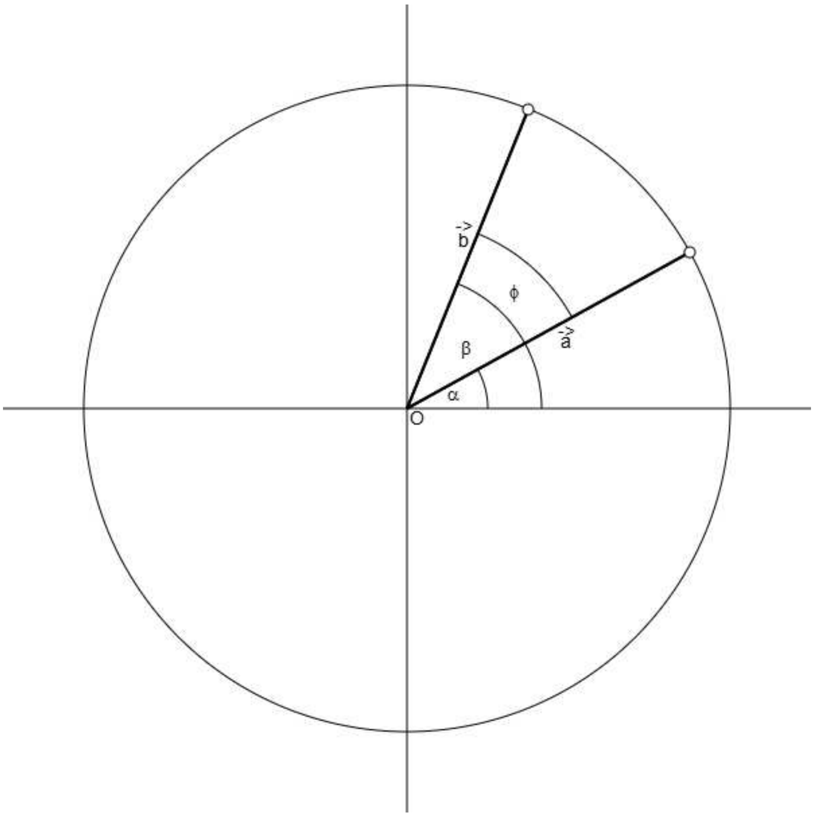
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\phi = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

mit: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

II. Im rechtwinkligen zweidimensionalen x_1-x_2-Koordinatensystem betrachten wir den Einheitskreis mit Radius r = 1 um den Koordinatenursprung O(0|0). Punkte auf dem Kreis repräsentieren Einheitsvektoren (mit Länge 1), die vom Ursprung ausgehen und mit der x_1-Achse des Koordinatensystems einen gewissen Winkel bilden. Es gilt die Polarkoordinatendarstellung dieser Vektoren, d.h.: für zwei Einheitsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ haben wir die Form:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 1$.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden: α < β, der Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ heiße Φ mit: Φ = β-α. Wir haben damit die folgende Situation im x_1-x_2-Koordinatensystem und am Einheitskreis gegeben:



III. Das Skalarprodukt der zwei Einheitsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ errechnet sich wegen $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$

einmal als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi = 1 \cdot 1 \cdot \cos\phi = \cos\phi,$$

zum anderen als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Es gilt damit die <u>Identität</u>:

$$\cos\phi = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

also:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (*).$$

IV. Unter Verwendung der bekannten Werte sin(0°) = 0, cos(0°) = 1, sin(90°) = 1, cos(90°) = 0 erhalten wir aus der Identität (*) zunächst <u>Formeln für den Kosinus</u>:

β = 0° -> cos(-α) = cos(0°-α) = cos(α)·cos(0°)+sin(α)·sin(0°) = cos(α) ->

cos(-α) = cos(α) (Symmetrie)

β = 90° -> cos(90°-α) = cos(α)·cos(90°) + sin(α)·sin(90°) = sin(α) ->

cos(90°-α) = sin(α) (zum Komplementärwinkel 90°–α)

sowie den Satz des Pythagoras im Einheitskreis:

β = α -> cos(0°) = cos(α)·cos(α) + sin(α)·sin(α) -> $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Wir folgern noch für <u>Formeln für den Sinus</u> unter Benutzung von sin(-90°) = -1, cos(-90°) = 0:

sin(-β) = cos(90°-(-β)) = cos(90°+β) = cos(β+90°) = cos(β-(-90°)) =
cos(-90°)·cosβ + sin(-90°)·sin(β) = -sin(β) ->

sin(-β) = -sin(β) (Symmetrie)

sin(90°-α) = cos(90°-(90°-α)) = cos(α) ->

sin(90°-α) = cos(α) (zum Komplementärwinkel 90°–α)

V. Wir können nun alle Additionstheoreme nachweisen. Es gilt gemäß der Identität (*)

α = ψ, β = φ ->

$$\cos(\varphi-\psi)=\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi$$

α = -ψ, β = φ ->

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos(-\psi)\cos\varphi+\sin(-\psi)\sin\varphi=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$$

α = ψ, β = 90°-φ ->

$$\sin(\varphi+\psi)=\cos(90°-(\varphi+\psi))=\cos(90°-\varphi-\psi)=\cos((90°-\varphi)-\psi)=$$

$$\cos\psi\cos(90°-\varphi)+\sin\psi\sin(90°-\varphi)=\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$$

α = -ψ, β = 90°-φ ->

$$\sin(\varphi-\psi)=\cos(90°-(\varphi-\psi))=\cos(90°-\varphi+\psi)=\cos((90°-\varphi)-(-\psi))=$$

$$\cos(-\psi)\cos(90°-\varphi)+\sin(-\psi)\sin(90°-\varphi)=\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi=\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi$$

Damit ist alles beweisen.

www.michael-buhlmann.de / 07.2024 / Aufgabe 2166