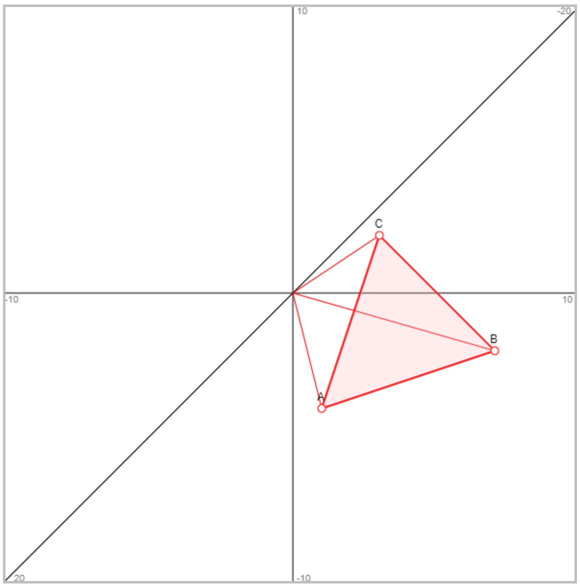
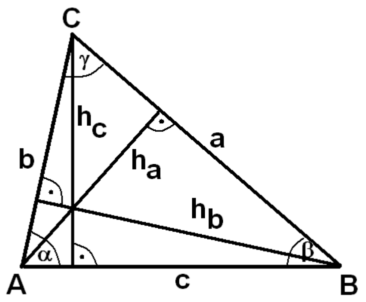
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieck

Aufgabe: Die Punkte A(4|3|-2), B(0|7|-2) und C(8|7|6) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.



Lösung: I. Es gilt die folgende Übersicht zur Berechnung von Dreiecken:

Dreieck ABC in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF), Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, Winkel an den Ecken A, B, C: α, β, γ.	
$\vec{AB} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{AB} \neq k\,\vec{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{BC} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
Seiten: $c = \left\|\vec{AB}\right\|$, $b = \left\|\vec{AC}\right\|$, $a = \left\|\vec{BC}\right\|$, Umfang: $u = \left\|\vec{AB}\right\| + \left\|\vec{AC}\right\| + \left\|\vec{BC}\right\|$	
$\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichseitig (α = β = γ = 60°)	
Winkel: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|}$, $\cos\beta = -\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$, $\cos\gamma = \dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AC}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC}\cdot\vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Satz des Pythagoras: $\left\|\vec{AB}\right\|^2 + \left\|\vec{AC}\right\|^2 = \left\|\vec{BC}\right\|^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\left\|\vec{AB}\right\|^2 + \left\|\vec{BC}\right\|^2 = \left\|\vec{AC}\right\|^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\left\|\vec{AC}\right\|^2 + \left\|\vec{BC}\right\|^2 = \left\|\vec{AB}\right\|^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Höhen: $h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a = \dfrac{\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{AC}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|}$, $h_b = \dfrac{\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AC}\right\|}$, $h_c = \dfrac{\left\|\vec{AC}\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$ usw.	
Fläche: $A = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \dfrac{\vec{BC}\cdot d(A, g_{BC})}{2} = \dfrac{\vec{AC}\cdot d(B, g_{AC})}{2} = \dfrac{\vec{AB}\cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \dfrac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{BC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\vec{AC}\times\vec{BC}\right\|$	

Dreieck

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ΔABC kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

II. Wir bilden aus den Ecken des Dreiecks ΔABC die Differenzvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ und haben:

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(4 | 3 | -2)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(0 | 7 | -2)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(8 | 7 | 6)
Differenzvektor: $AB^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $BC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$
Seite: a = $\|BC^{->}\|$ =	11.314 LE
Seite: b = $\|AC^{->}\|$ =	9.798 LE
Seite: c = $\|AB^{->}\|$ =	5.657 LE
Bemerkung:	Dreieck ist beliebig.
Umfang: u =	26.769 LE
	u = a + b + c
Winkel: α =	90°
Winkel: β =	60°
Winkel: γ =	30°
Bemerkung:	Dreieck ist rechtwinklig.
Winkelsumme =	180°
	α + β + γ = 180°
Normalenvektor: $n^{->} = AB^{->} \times AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 32 \\ 32 \\ -32 \end{pmatrix}$
Flächeninhalt/ΔABC: A_Δ =	27.713 FE
	$A_\Delta = \|AB^{->} \times AC^{->}\|/2$

III. Die Winkelberechnung lässt sich vereinfachen, wenn der Satz des Pythagoras angewendet wird. Es gilt nämlich mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{96}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{8^2 + 0^2 + 8^2} = \sqrt{128}$: $\sqrt{32}^2 + \sqrt{96}^2 = \sqrt{128}^2$ wegen: 32 + 96 = 128. Damit ist der Winkel α gegenüber der Hypotenuse $\overrightarrow{BC}$ ein rechter Winkel. Z.B. mit dem errechneten Winkel γ = 30° folgt: β = 180° – α – γ = 180° – 90° – 30° = 60°.

IV. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ergibt sich der Flächeninhalt A_Δ aus den Katheten $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{32} \cdot \sqrt{96} = \frac{1}{2} \cdot 32\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \approx$ 27,713 FE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)