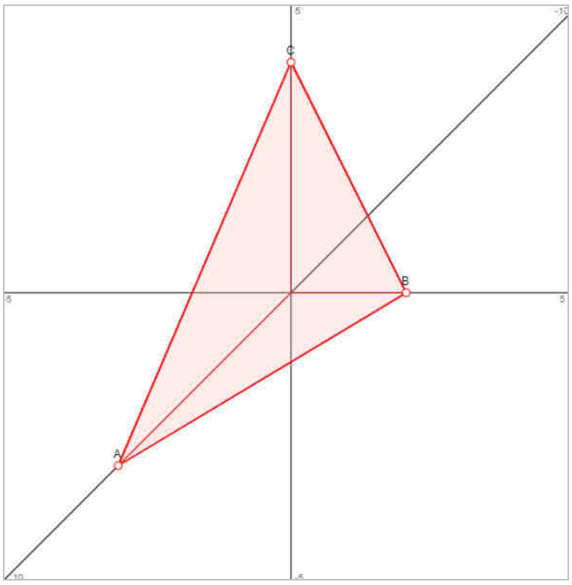
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieck

Aufgabe: Die Spurpunkte der Ebene

$$E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12$$

sind die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks. Berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.



Lösung: I. Allgemein gilt hinsichtlich der Ermittlung der Spurpunkte die folgende Vorgehensweise: Ist eine Ebene E als Koordinatengleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen a, b, c, d gegeben, so ergeben sich als Spurpunkte auf den Koordinatenachsen:

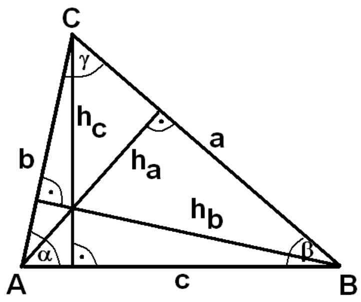
x_1-Achse: Spurpunkt A(d/a|0|0) bei a≠0, kein Spurpunkt A bei a=0
x_2-Achse: Spurpunkt B(0|d/b|0) bei b≠0, kein Spurpunkt B bei b=0
x_3-Achse: Spurpunkt C(0|0|d/c) bei c≠0, kein Spurpunkt C bei c=0.

II. Für die Ebene E: $2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12$ können als (drei) Spurpunkte bestimmt werden:

x_1-Achse: Spurpunkt A(6|0|0)
x_2-Achse: Spurpunkt B(0|2|0)
x_3-Achse: Spurpunkt C(0|0|4).

Die Spurpunkte A(6|0|0), B(0|2|0), C(0|0|4) bilden das Dreieck ΔABC.

III. Es gilt die folgende <u>Übersicht</u> zur Berechnung von Dreiecken:

Dreieck ABC in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF), Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, Winkel an den Ecken A, B, C: α, β, γ.	
$\vec{AB} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{AB} \neq k\,\vec{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{BC} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
Seiten: $c = \left\|\vec{AB}\right\|$, $b = \left\|\vec{AC}\right\|$, $a = \left\|\vec{BC}\right\|$, Umfang: $u = \left\|\vec{AB}\right\| + \left\|\vec{AC}\right\| + \left\|\vec{BC}\right\|$	
$\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{AC}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichseitig (α = β = γ = 60°)	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$, $\cos\gamma = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AC}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC}\cdot\vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Satz des Pythagoras: $\left\|\vec{AB}\right\|^2 + \left\|\vec{AC}\right\|^2 = \left\|\vec{BC}\right\|^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\left\|\vec{AB}\right\|^2 + \left\|\vec{BC}\right\|^2 = \left\|\vec{AC}\right\|^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\left\|\vec{AC}\right\|^2 + \left\|\vec{BC}\right\|^2 = \left\|\vec{AB}\right\|^2$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Höhen: $h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a = \frac{\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{AC}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|}$, $h_b = \frac{\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AC}\right\|}$, $h_c = \frac{\left\|\vec{AC}\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$ usw.	
Fläche: $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\vec{BC}\cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\vec{AC}\cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\vec{AB}\cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{AC}\times\vec{BC}\right\|$	

Dreieck

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ΔABC kann das <u>Kreuzprodukt</u> (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

IV. Wir bilden aus den Ecken des Dreiecks ΔABC die Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ und haben:

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(6 | 0 | 0)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(0 | 2 | 0)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(0 | 0 | 4)
Differenzvektor: $AB^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $BC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
Seite: a = $\|BC^{->}\|$ =	4.472 LE
Seite: b = $\|AC^{->}\|$ =	7.211 LE
Seite: c = $\|AB^{->}\|$ =	6.325 LE
Bemerkung:	Dreieck ist beliebig.
Umfang: u =	18.008 LE
	u = a + b + c
Winkel: α =	37.875°
Winkel: β =	81.87°
Winkel: γ =	60.255°
Bemerkung:	Dreieck ist spitzwinklig.
Winkelsumme =	180°
	α + β + γ = 180°
Normalenvektor: $n^{->} = AB^{->} \times AC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$
Flächeninhalt/ΔABC: A_Δ =	14 FE
	$A_\Delta = \|AB^{->} \times AC^{->}\|/2$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1657