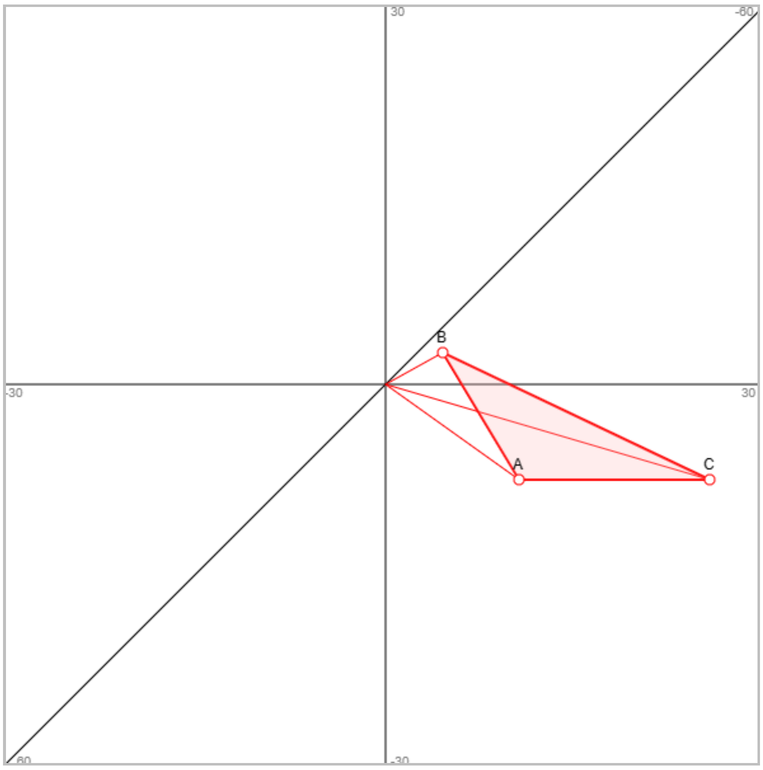
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieck

Aufgabe: A(-1|10|-8), B(11|10|8), C(-1|25|-8) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeige, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist. Berechne seinen Umfang und seinen Flächeninhalt.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras, d.h. dass für die Seitenlängen des Dreiecks mit den Katheten p und q sowie der Hypotenuse r die Beziehung:

$$p^2 + q^2 = r^2$$

wahr ist. Die Hypotenuse ist die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck, also: p < r, q < r.

II. Der Betrag oder die Länge eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ errechnet sich mit:

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \; .$$

III. Aus den Eckpunkten A(-1|10|-8), B(11|10|8), C(-1|25|-8) bilden wir die Differenzvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix},\ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -16 \end{pmatrix}$$

und berechnen deren Beträge:

$$\left|\vec{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{12^2 + 0^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ LE},\ \left|\vec{AC}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2 + 15^2 + 0^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ LE},$$

$$\left|\vec{BC}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -16 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{12^2 + 15^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ LE}.$$

Wir bilden aus den so errechneten Seitenlängen des Dreiecks die Beziehung:

$20^2 + 15^2 = 25^2$
$400 + 225 = 625$
$625 = 625$

und haben damit die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras im Dreieck ΔABC nachgewiesen. Das Dreieck ΔABC ist somit rechtwinklig, seine Hypotenuse ist die Seite $\vec{BC}$, der rechte Winkel ist der Winkel α an der Ecke A.

IV. Der Umfang des Dreiecks ΔABC ist:

$$u = \left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{AC}\right| + \left|\vec{BC}\right| = 20 + 15 + 25 = 60 \text{ LE}.$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC folgt mit Hilfe der Katheten $\vec{AB}$, $\vec{AC}$:

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150 \text{ FE}.$$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2024 / Aufgabe 2023