Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Kugeln

Aufgabe: Gegeben ist eine Kugel K im dreidimensionalen kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius r = 3 LE (Längeneinheiten).

a) Wie lauten Vektor- und Koordinatengleichung der Kugel K?

b) Wo schneidet die Kugel die Achsen des Koordinatensystems? Wie lauten die Tangentialebenen zur Kugel K in den Achsenschnittpunkten?

c) Zeige, dass der Punkt P(1|-2|2) auf der Kugel K liegt. Wie lautet die dazugehörige Tangentialebene?

d) Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet die Kugel K in zwei Punkten. Berechne diese!

e) Bestimme die Schnittkreise der Kugel K mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems.

f) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises k zwischen der Kugel K und der Ebene E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$.

g) Eine zweite Kugel besitze die Koordinatengleichung: K*: $x_1^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4$. Gib den Mittelpunkt und den Radius der Kugel K* an. Zeige, dass sich die Kugeln K und K* schneiden. Bestimme den Mittelpunkt und Radius des Kreises k, der die Schnittmenge der beiden Kugeln darstellt.

Lösung: I. Eine <u>Kugel</u> K im dreidimensionalen kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem enthält alle Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$, die denselben Abstand r zum vorgegebenen Kugelmittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ haben. Die <u>Vektorgleichung</u> der Kugel mit Mittelpunkt M und positivem Radius r lautet (als Skalarprodukt mit dem Differenzvektor zwischen Kugelpunkt X und Kugelmittelpunkt):

$$K: \left(\vec{x} - \vec{OM}\right)^2 = r^2,$$

die <u>Koordinatengleichung</u>:

$$K: (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2.$$

II. Es gelten die folgenden <u>Lagebeziehungen</u> zwischen Kugeln, Punkten, Geraden und Ebenen:

Ein <u>Punkt</u> $P(p_1|p_2|p_3)$ liegt auf der Kugel, wenn die Gleichung $(p_1-m_1)^2 + (p_2-m_2)^2 + (p_3-m_3)^2 = r^2$ erfüllt ist; er liegt innerhalb der Kugel, wenn $(p_1-m_1)^2 + (p_2-m_2)^2 + (p_3-m_3)^2 < r^2$, außerhalb, wenn $(p_1-m_1)^2 + (p_2-m_2)^2 + (p_3-m_3)^2 > r^2$ gilt. Liegt der Punkt P außerhalb der Kugel, so lässt sich der Abstand zwischen Punkt und Kugel berechnen als: $d(P, K) = \left|\vec{MP}\right| - r$.

Für eine <u>Gerade</u> g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit Stützvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$ lassen sich die eventuellen (maximal zwei) Schnittpunkte errechnen durch Einsetzen der Geradenkomponenten $x_1 = a_1+tu_1$, $x_2 = a_2+tu_2$, $x_3 = a_3+tu_3$ in die Koordinatengleichung der Kugel K: $(x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_2-m_2)^2 = r^2$, Auflösen der entstehenden quadratischen Gleichung $(a_1+tu_1-m_1)^2 + (a_2+tu_2-m_2)^2 + (a_3+tu_3-m_3)^2 = r^2$ (*) nach $t = t_{1,2}$ (keine, eine oder zwei Lösungen; abc-, pq-Formel zum Lösen der quadratischen Gleichung) und Einsetzen von $t_{1,2}$ in die

Geradengleichung von g als: $\vec{OS}_{1.2} = \vec{a} + t_{1,2}\,\vec{u}$. Gibt es keine Schnittpunkte, hat also die quadratische Gleichung (*) keine Lösung, so bestimmt sich der Abstand zwischen Gerade und Kugel als: d(g, K) = $\left|\vec{MF}\right| - r$, wobei F der Lotfußpunkt des Kugelmittelpunkt M auf der Geraden g ist (Lotfußpunktverfahren mit Orthogonalitätsbedingung, Hilfsebenenverfahren).

Eine Ebene besitze die Koordinatengleichung E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$. Ist $F(f_1|f_2|f_3)$ der Lotfußpunkt bzgl. des Kugelmittelpunkts M auf der Ebene E, so schneiden sich Ebene E und Kugel K in einer Kreisfläche k mit dem Lotfußpunkt F als Kreismittelpunkt, wenn $(f_1–m_1)^2 + (f_2–m_2)^2 + (f_3–m_3)^2 < r^2$ gilt; sie berühren sich im Lotfußpunkt F, wenn $(f_1–m_1)^2 + (f_2–m_2)^2 + (f_3–m_3)^2 = r^2$ erfüllt ist; sie schneiden sich nicht, wenn $(f_1–m_1)^2 + (f_2–m_2)^2 + (f_3–m_3)^2 > r^2$ gilt. Im Fall, dass Ebene und Kugel sich in einer Kreisfläche schneiden, liegt die Kreisfläche auf der Ebene und ist der Lotfußpunkt F der Mittelpunkt des Kreises k; der Kreisradius r_k bestimmt sich vermöge der Beziehung: $r_k = \sqrt{r^2 - \left|\vec{MF}\right|^2}$. Liegt die Ebene außerhalb der Kugel, so berechnet sich der Abstand zwischen Ebene und Kugel als: d(E, K) = $\left|\vec{MF}\right| - r$.

Für zwei Kugeln K: $(x_1–m_1)^2 + (x_2–m_2)^2 + (x_2–m_2)^2 = r^2$ und K*: $(x_1–n_1)^2 + (x_2–n_2)^2 + (x_2–n_2)^2 = r_1^2$ mit den Mittelpunkten $M(m_1|m_2|m_3)$ und $N(n_1|n_2|n_3)$ sowie den Radien r und r_1 gilt hinsichtlich ihrer Lage zueinander: Die Kugeln schneiden sich, wenn $\left|\vec{MN}\right| < r + r_1$ gilt; sie berühren sich, wenn $\left|\vec{MN}\right| = r + r_1$ gilt; sie schneiden sich nicht, wenn $\left|\vec{MN}\right| > r + r_1$ gilt. Im Fall, dass sich die Kugeln berühren, ergibt sich der Berührpunkt B auf der Strecke zwischen den Mittelpunkten M und N gemäß: $\vec{OB} = \vec{OM} + \frac{r}{r+r_1}\vec{MN} = \frac{r_1}{r+r_1}\vec{OM} + \frac{r}{r+r_1}\vec{ON}$. Im Fall, dass sich die zwei Kugeln schneiden, ergibt sich ein Kreis k, der auf beiden Kugeln liegt. Der Kreis k ist Teilmenge einer Schnittebene E, die sich als Differenz der Koordinatengleichungen der Kugeln ergibt, also: E: $[(x_1–m_1)^2 + (x_2–m_2)^2 + (x_2–m_2)^2] – [(x_1–n_1)^2 + (x_2–n_2)^2 + (x_2–n_2)^2] = r^2 – r_1^2$. Der Kreismittelpunkt ist der Lotfußpunkt F etwa des Kugelmittelpunkts M auf der Ebene E. Der Kreisradius r_k bestimmt sich als: $r_k = \sqrt{r^2 - \left|\vec{MF}\right|^2}$.

III. Ist $P(p_1|p_2|p_3)$ ein Punkt auf einer Kugel K: $\left(\vec{x} - \vec{OM}\right)^2 = r^2$ (VF, $M(m_1|m_2|m_3)$ als Kugelmittelpunkt, r als Kugelradius) bzw. K: $(x_1–m_1)^2 + (x_2–m_2)^2 + (x_3–m_3)^2 = r^2$ (KF), so ergibt sich mit:

$$\text{E: } \vec{MP} \cdot \left(\vec{x} - \vec{OM}\right) = r^2 \text{ (NF) bzw.}$$

$$\text{E: } (p_1–m_1)(x_1–m_1) + (p_2–m_2)(x_2–m_2) + (p_3–m_3)(x_3–m_3) = r^2$$

die Tangentialebene der Kugel K im Punkt P, also die Ebene E, die die Kugel im Punkt P berührt.

a) Mit dem Kugelmittelpunkt O(0|0|0) und dem Kugelradius r = 3 ergeben sich sofort:

$$\text{K: } \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \text{K: } \vec{x}^2 = 9 \text{ (VF) bzw.}$$

$$\text{K: } (x_1–0)^2 + (x_2–0)^2 + (x_3–0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \text{K: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \text{ (KF)}$$

als Vektor- und Koordinatengleichung.

b) Achsenschnittpunkte und dazugehörige Tangentialebenen zur Kugel K sind:

x_1-Achse: $S_{11}(3|0|0)$, E_{11}: $x_1 = 3$; $S_{12}(-3|0|0)$, E_{12}: $x_1 = -3$;
x_2-Achse: $S_{21}(0|3|0)$, E_{21}: $x_2 = 3$; $S_{22}(0|-3|0)$, E_{22}: $x_2 = -3$;
x_3-Achse: $S_{31}(0|0|3)$, E_{31}: $x_3 = 3$; $S_{32}(0|0|-3)$, E_{32}: $x_3 = -3$.

c) I. Punktprobe mit dem Punkt P(1|-2|2) und der Koordinatengleichung: K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ ergibt:

$1^2+(-2)^2+2^2 = 1+4+4 = 9$

und damit den Nachweis, dass der Punkt P auf der Kugel K liegt.

II. Die Tangentialebene im Punkt P zur Kugel K hat den Vektor $\vec{n} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als

Normalenvektor und den Punkt P(1|-2|2) als Stützvektor, so dass wegen E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{OP}$ folgt:

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⇔ E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+2\cdot 2$ ⇔ E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9$.

d) Für die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Kugel K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ ergibt das Einsetzen der Geradenkomponenten $x_1 = 1+t$, $x_2 = 3-4t$, $x_3 = -2$ in die Koordinatenform der Kugel:

$(1+t)^2 + (3-4t)^2 + (-2)^2 = 9$.

Umformungen führen auf eine quadratische Gleichung in t:

$(1+t)^2 + (3-4t)^2 + (-2)^2 = 9$	(Klammern auflösen, binomische Formeln)
$1+2t+t^2 + 9-24t+16t^2 + 4 = 9$	(Zusammenfassen)
$17t^2-22t+14 = 9$	|-9
$17t^2-22t+5 = 0$	(abc-Formel)

$$t_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 - 4\cdot 17\cdot 5}}{2\cdot 17} = \frac{22 \pm \sqrt{144}}{34} = \frac{22 \pm 12}{34}$$

$$t_1 = \frac{22-12}{34} = \frac{10}{34} = \frac{5}{17},\ t_2 = \frac{22+12}{34} = \frac{34}{34} = 1.$$

Als Schnittpunkte P, Q zwischen Gerade und Kugel ergeben sich damit:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{5}{17}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 22 \\ 31 \\ -34 \end{pmatrix} \text{ => P(22/17|31/17|-2)}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ => Q(2|-1|-2).}$$

e) Die Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems enthalten den Koordinatenursprung und damit den Mittelpunkt O(0|0|0) der Kugel K, der gleichzeitig Mittelpunkt der drei Schnittkreise ist (Kugelmittelpunkt als Lotfußpunkt auf der jeweiligen Grundebene). Es ergeben sich als Schnittkreise:

x_1-x_2-Grundebene (E_{12}: $x_3 = 0$): $x_1^2 + x_2^2 = 9$;
x_1-x_3-Grundebene (E_{13}: $x_2 = 0$): $x_1^2 + x_3^2 = 9$;
x_2-x_3-Grundebene (E_{23}: $x_1 = 0$): $x_2^2 + x_3^2 = 9$.

f) I. Wir bestimmen zunächst den Lotfußpunkt F auf der Ebene E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$ zum Kugelmittelpunkt O(0|0|0) und erhalten mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E zunächst die zur

Ebene senkrechte Lotgerade h durch den Kugelmittelpunkt O als:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von der Lotgeraden h und der Ebene E ist der Lotfußpunkt F gemäß:

Gerade h -> Geradenkomponenten: $x_1 = 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 2t$ -> Einsetzen in Ebene E -> Gleichung: $2\cdot 2t + t + 2\cdot 2t = 3 \Leftrightarrow 9t = 3 \Leftrightarrow t = 1/3$

und: $\vec{OF} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also: F(2/3|1/3|2/3).

II. Der Lotfußpunkt F liegt wegen: $(2/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2 = 9/9 = 1 < 9$ innerhalb der Kugel K, so dass sich Kugel K und Ebene E schneiden. Mittelpunkt von <u>Schnittkreis</u> k und Schnittfläche ist der Lotfußpunkt F(2/3|1/3|2/3). Der Schnittkreisradius berechnet sich auf der Grundlage der Abstandes zwischen Lotfußpunkt und Ursprung: $\left|\vec{OF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2} = \sqrt{1} = 1$ LE als:

$r_k = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ LE.

g) I. Aus der Koordinatengleichung K*: $x_1^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4 = 2^2$ ist sofort der <u>Kugelmittelpunkt</u> N(0|2|1) und der <u>Kugelradius</u> $r_1 = 2$ abzulesen.

II. Wegen $r = 3$, $r_1 = 2$ und $\left|\vec{ON}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ist: $\sqrt{5} < 3 + 2 = 5$, so dass sich die zwei Kugeln K und K* schneiden (<u>Schnittkreis</u> k).

III. Die <u>Schnittebene</u> E, auf der sich der Schnittkreis k befindet, erhalten wir durch Differenzbildung im (nicht linearen) Gleichungssystem:

(1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$
(2) $x_1^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_3^2 - 2x_3 + 1 = 4 \Leftrightarrow$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 - 2x_3 = -1$,

so dass (1)–(2) ergibt:

E: $4x_2 + 2x_3 = 10 \Leftrightarrow$ E: $2x_2 + x_3 = 5$.

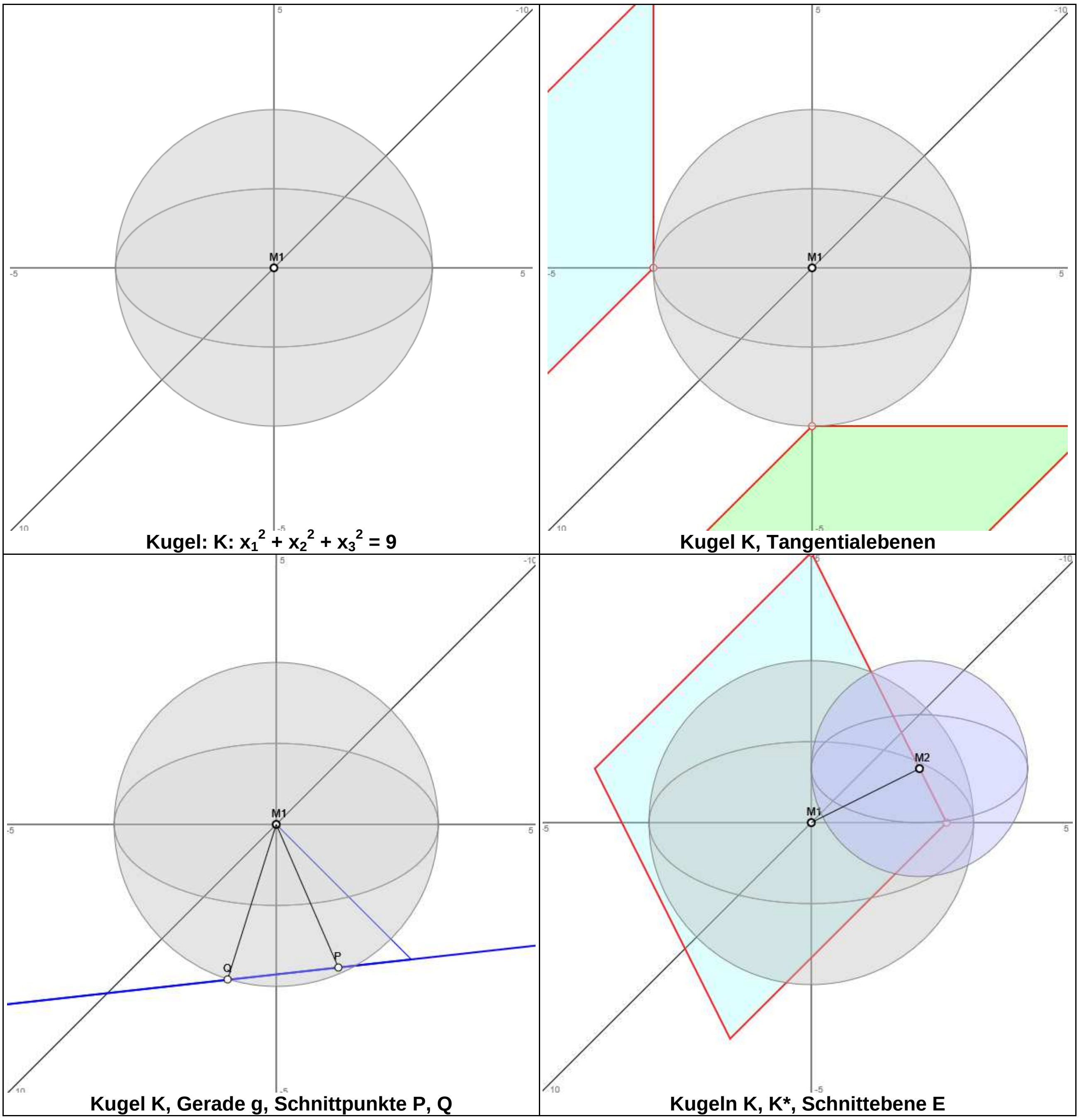
IV. Der <u>Mittelpunkt</u> des Schnittkreises k errechnet sich als Lotfußpunkt F auf der Ebene E zum Mittelpunkt O(0|0|0) der Kugel K. Die senkrecht auf der Ebene stehende, durch den Koordinatenursprung O laufende Lotgerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E auf Grund von:

Gerade h -> Geradenkomponenten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2t$, $x_3 = t$ -> Einsetzen in Ebene E -> Gleichung: $2\cdot 2t + t = 5 \Leftrightarrow 5t = 5 \Leftrightarrow t = 1$

im Lotfußpunkt: $\vec{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. F(0|2|1), der damit gleichzeitig der Mittelpunkt N der Kugel K* ist.

Der Radius des Schnittkreises k ist wegen $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$

$r_k = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$ und damit identisch mit dem Radius der Kugel K*. Die Fläche des Schnittkreises k halbiert damit die Kugel K*.



Kugel: K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ | **Kugel K, Tangentialebenen** | **Kugel K, Gerade g, Schnittpunkte P, Q** | **Kugeln K, K*, Schnittebene E**

Abkürzungen: KF = Koordinatenform, NF = Normalenform, VF = Vektorform.