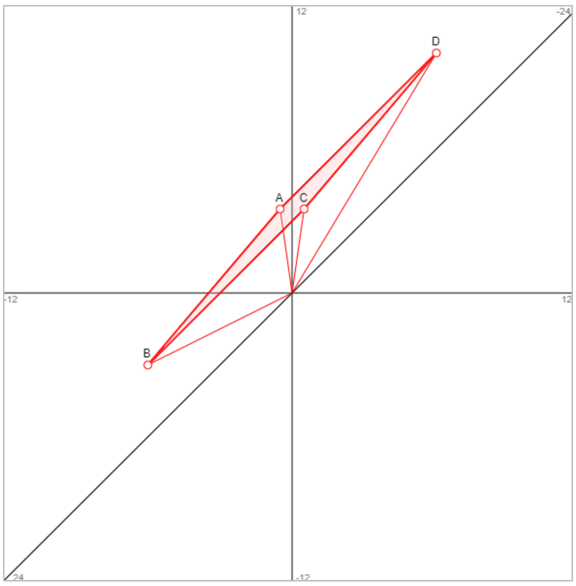
**Michael Buhlmann**

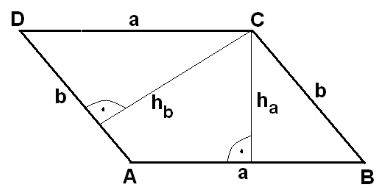
# Mathematikaufgaben
## > Vektorrechnung
## > Parallelogramm

---

**Aufgabe**: Die Punkte A(-3|-2|2), B(4|-4|-1), C(3|2|5) und D(-4|4|8) sind die Eckpunkte eines Vierecks. Zeige, dass das Viereck ein Parallelogramm ist, und berechne die Seitenlängen und die Innenwinkel sowie Umfang und Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.




**Lösung**: I. Es gilt die folgende <u>Übersicht</u> zur Berechnung von Parallelogrammen:

| | |
|---|---|
| Parallelogramm ABCD in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ. |  |
| $\vec{AB} = \vec{DC}$ => Parallelogramm<br>$\vec{BC} = \vec{AD}$ => Parallelogramm | |
| Seiten: $a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\|$, $b = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$, Umfang: $u = 2\left\|\vec{AB}\right\| + 2\left\|\vec{BC}\right\|$ | |
| Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AD}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$ usw. | Winkelsumme:<br>α + β + γ + δ = 360°<br>α + β = 180°, γ + δ = 180°<br>α = γ, β = δ |
| Höhen: $h_a = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$, $h_b = d(C, g_{AD})$ bzw. $h_b = \frac{\left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|}{\left\|\vec{AD}\right\|}$ | |
| Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB}\cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD}\cdot d(C, g_{AD})$<br>bzw. $A = \left\|\vec{AB}\times\vec{AD}\right\|$ | Erläuterung:<br>$g_{PQ}$: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$<br>d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g |

**Parallelogramm**

Für die Berechnung des Flächeninhalts eines Vierecks ΔABC kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt) verwendet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

II. Wir bilden aus den Ecken des Vierecks ABCD die Differenzvektoren $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ und haben:

| | |
|---|---|
| Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$ | A(-3 \| -2 \| 2) |
| Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$ | B(4 \| -4 \| -1) |
| Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$ | C(3 \| 2 \| 5) |
| Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$ | D(-4 \| 4 \| 8) |
| Differenzvektor: $\vec{AB}$ = | $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| Differenzvektor: $\vec{BC}$ = | $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ |
| Differenzvektor: $\vec{CD}$ = | $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ |
| Differenzvektor: $\vec{AD}$ = | $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ |
| Seite: $a = \|\vec{AB}\|$ = | 7.874 LE |
| Seite: $b = \|\vec{BC}\|$ = | 8.544 LE |
| Höhe: $h_a$ = | 7.136 LE |
| Höhe: $h_b$ = | 6.576 LE |
| Umfang: u = | 32.836 LE |
| | $u = 2\|\vec{AB}\| + 2\|\vec{BC}\| = 2a + 2b$ |
| Innenwinkel: α = | 123.365° |
| Innenwinkel: β = | 56.635° |
| Winkelsumme | 360° |
| | $2\alpha + 2\beta = 360°$ |
| Bemerkung: | Parallelogramm ABCD |
| Ebene/Parallelogramm ABCD: E: | $6 x_1 + (-39) x_2 + 40 x_3 = 140$ |
| Flächeninhalt/Parallelogramm ABCD: $A_P$ = | 56.187 FE |
| | $A_P = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = ah_a = bh_b$ |

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1661