Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Spiegelung an Ebene

Aufgabe: Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ soll gespiegelt werden an einer Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Erstelle Formeln zur Ermittlung der Koordinaten des Bildpunktes $P'(p'_1|p'_2|p'_3)$.

Lösung: a) I. Wir verwenden als Methode zur Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene E eine durch den Punkt führende Lotgerade h senkrecht zu E. Der Schnittpunkt F von Ebene E und Lotgerade h ist der sog. Lotfußpunkt zum Punkt P auf der Ebene E. Um den Lotfußpunkt F kann der Punkt P zum Bildpunkt P' gespiegelt werden vermöge der Spiegelgleichung:

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\vec{PF} = \vec{OF} + \vec{PF} = 2\cdot\vec{OF} - \vec{OP}.$$

II. Die Lotgerade h senkrecht zur Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ durch den Punkt P bestimmt sich vermöge des Ortsvektors $\vec{OP}$ und des Richtungsvektors als Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene E wie folgt:

h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

III. Zur Bestimmung des Lotfußpunkts F auf Lotgerade h und Ebene E setzen wir die Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, also:

Gerade h -> $x_1 = p_1 + ta$, $x_2 = p_2 + tb$, $x_3 = p_3 + tc$ -> Ebene E -> $a(p_1+ta) + b(p_2+tb) + c(p_3+tc) = d$.

Die vom Geradenparameter t abhängige Gleichung ist nach Voraussetzung eindeutig lösbar; die Lösung errechnet sich mit:

$a(p_1+ta) + b(p_2+tb) + c(p_3+tc) = d$	(Auflösen der Klammern)
$ap_1+ta^2 + bp_2+tb^2 + cp_3+tc^2 = d$	(Sortieren)
$ta^2+tb^2+tc^2 + ap_1+bp_2+cp_3 = d$	(Ausklammern)
$t(a^2+b^2+c^2) + ap_1+bp_2+cp_3 = d$	$\mid -(ap_1+bp_2+cp_3)$
$t(a^2+b^2+c^2) = d - ap_1 - bp_2 - cp_3$	$\mid :(a^2+b^2+c^2)$

$t = \dfrac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{a^2+b^2+c^2}$.

Einsetzen des Wertes von t in die Gleichung der Lotgeraden h führt auf den Lotfußpunkt F:

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \frac{d - ap_1 - bp_2 - cp_3}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{ad - a^2p_1 - abp_2 - acp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{bd - abp_1 - b^2p_2 - bcp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{cd - acp_1 - bcp_2 - c^2p_3}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} \text{ ->}$$

F($p_1 + \frac{ad - a^2 p_1 - abp_2 - acp_3}{a^2+b^2+c^2}$ | $p_2 + \frac{bd - abp_1 - b^2 p_2 - bcp_3}{a^2+b^2+c^2}$ | $p_3 + \frac{cd - acp_1 - bcp_2 - c^2 p_3}{a^2+b^2+c^2}$).

IV. Die Anwendung der Spiegelgleichung führt auf die Koordinaten des Bildpunktes P‘. Es gilt für den Bildpunkt:

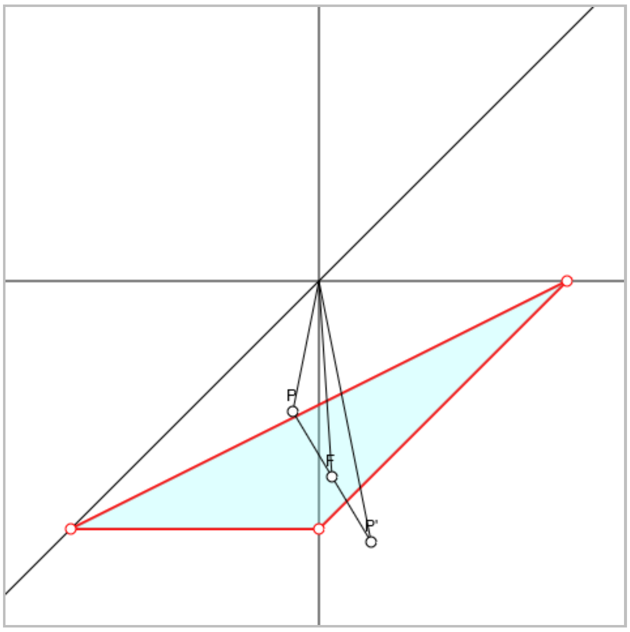
$$\vec{OP'} = 2\cdot\vec{OF} - \vec{OP} = 2\cdot\left[\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{ad - a^2 p_1 - abp_2 - acp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{bd - abp_1 - b^2 p_2 - bcp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{cd - acp_1 - bcp_2 - c^2 p_3}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} \frac{ad - a^2 p_1 - abp_2 - acp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{bd - abp_1 - b^2 p_2 - bcp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{cd - acp_1 - bcp_2 - c^2 p_3}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2\cdot\frac{ad - a^2 p_1 - abp_2 - acp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ p_2 + 2\cdot\frac{bd - abp_1 - b^2 p_2 - bcp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ p_3 + 2\cdot\frac{cd - acp_1 - bcp_2 - c^2 p_3}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{p_1(a^2+b^2+c^2) + 2(ad - a^2 p_1 - abp_2 - acp_3)}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{p_2(a^2+b^2+c^2) + 2(bd - abp_1 - b^2 p_2 - bcp_3)}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{p_3(a^2+b^2+c^2) + 2(cd - acp_1 - bcp_2 - c^2 p_3)}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2ad - a^2 p_1 + b^2 p_1 + c^2 p_1 - 2abp_2 - 2acp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2bd + a^2 p_2 - b^2 p_2 + c^2 p_2 - 2abp_1 - 2bcp_3}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2cd + a^2 p_3 + b^2 p_3 - c^2 p_3 - 2acp_1 - 2bcp_2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} \to$$

P‘($\frac{2ad - a^2 p_1 + b^2 p_1 + c^2 p_1 - 2abp_2 - 2acp_3}{a^2+b^2+c^2}$ | $\frac{2bd + a^2 p_2 - b^2 p_2 + c^2 p_2 - 2abp_1 - 2bcp_3}{a^2+b^2+c^2}$ | $\frac{2cd + a^2 p_3 + b^2 p_3 - c^2 p_3 - 2acp_1 - 2bcp_2}{a^2+b^2+c^2}$)

Damit sind die Koordinaten des Bildpunkts ermittelt.



www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1900