

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

### > Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

**Aufgabe:** Gegeben sind der Punkt  $P(6|2|7)$  und die Ebene  $E$  mit:

$$E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5.$$

Spiegele den Punkt  $P$  an der Ebene  $E$ .

**Lösung:** I. Ein Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  und eine Ebene  $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$  (KF) können im dreidimensionalen  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a)  $P$  liegt auf/in  $E$ ; b)  $P$  liegt nicht auf/in  $E$ . Aus Punkt  $P$  mit Ortsvektor  $\vec{p}$  und Ebene  $E$  mit Normalenvektor  $\vec{n}$  lässt sich die Lotgerade  $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$  durch den Punkt  $P$  und senkrecht zur Ebene  $E$  konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten)  $x_1, x_2, x_3$  der Lotgeraden  $l$  in die Koordinatengleichung der Ebene  $E$  führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in  $t$  mit Lösung  $t = t_0$ , Lotgerade  $l$  und Ebene  $E$  schneiden sich im Lotfußpunkt  $F$ , der durch Einsetzen des Parameters  $t = t_0$  in die Geradengleichung  $l$  berechnet wird. Der Bildpunkt  $P'$ , der bei der Spiegelung des Punktes  $P$  an der Ebene  $E$  entsteht, errechnet sich nach der Spiegelformel:

$$\vec{OP}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} \quad (\text{bzw.: } \vec{OP}' = \vec{OF} + \vec{PF} \text{ bzw. } \vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{OF}).$$

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden  $l$  erstellt auf der Grundlage des Punktes  $P(6|2|7)$  und der

Ebene  $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$  mit Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade  $l$  wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten)  $x_1, x_2, x_3$  zerlegt:

$$x_1 = 6 + 2t, \quad x_2 = 2 + 2t, \quad x_3 = 7 + t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten)  $x_1, x_2, x_3$  der Geradengleichung  $l$  in die Koordinatenform der Ebenengleichung  $E$  ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter  $t$ :

$$\text{Ebene } E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \rightarrow 2(6 + 2t) + 2(2 + 2t) + (7 + t) = 5 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung  $(*)$  (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$2(6 + 2t) + 2(2 + 2t) + (7 + t) = 5 \Leftrightarrow 23 + 9t = 5 \Leftrightarrow 9t = -18 \Leftrightarrow t = -2.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade  $l$  und die Ebene  $E$  schneiden sich im Lotfußpunkt  $F$ . Der Lotfußpunkt  $F$  lautet:

$$\text{Parameter } t = -2 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(2|-2|5).$$

III. Mit dem Punkt  $P(6|2|7)$  und dem Lotfußpunkt  $F(2|-2|5)$  berechnet sich Bildpunkt  $P'$  der Spiegelung des Punktes  $P$  an der Ebene  $E$  nach der Spiegelformel als:

$$\vec{OP}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow P'(-2|-6|3).$$

Der gesuchte (gespiegelte) Bildpunkt P' ist damit: P'(-2|-6|3).

IV. Der Abstand des Punktes P(6|2|7) zur Ebene E:  $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$  ist der Abstand des Punktes P zum Lotfußpunkt F(2|-2|5):

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ LE.}$$

Der Abstand zwischen Urbildpunkt P(6|2|7) und Bildpunkt P'(-2|-6|3) ist doppelt so groß:

$$d(P,P') = 2 \cdot d(P,F) = 12 \text{ LE.}$$

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)