

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe: Gegeben sind der Punkt $P(-30|-40|5)$ und die Ebene E mit:

$$E: 8x_1 + 4x_2 + x_3 = 10.$$

Spiegle den Punkt P an der Ebene E .

Lösung: I. Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und eine Ebene $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) P liegt auf/in E ; b) P liegt nicht auf/in E . Aus Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich die Lotgerade $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Lotgeraden l in die Koordinatengleichung der Ebene E führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in t mit Lösung $t = t_0$, Lotgerade l und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung l berechnet wird. Der Bildpunkt P' , der bei der Spiegelung des Punktes P an der Ebene E entsteht, errechnet sich nach der Spiegelformel:

$$\vec{OP}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} \quad (\text{bzw.: } \vec{OP}' = \vec{OF} + \vec{PF} \text{ bzw. } \vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{OF}).$$

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden l erstellt auf der Grundlage des Punktes $P(-30|-40|5)$ und der Ebene $E: 8x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade l wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$x_1 = -30 + 8t, \quad x_2 = -40 + 4t, \quad x_3 = 5 + t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung l in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter t :

$$\text{Ebene } E: 8x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \rightarrow 8(-30 + 8t) + 4(-40 + 4t) + (5 + t) = 10 (*).$$

Umformen der Gleichung (*) (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$8(-30 + 8t) + 4(-40 + 4t) + (5 + t) = 10 \Leftrightarrow -395 + 81t = 10 \Leftrightarrow 81t = 405 \Leftrightarrow t = 5.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade l und die Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F . Der Lotfußpunkt F lautet:

$$\text{Parameter } t = 5 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(10|-20|10).$$

III. Mit dem Punkt $P(-30|-40|5)$ und dem Lotfußpunkt $F(10|-20|10)$ berechnet sich Bildpunkt P' der Spiegelung des Punktes P an der Ebene E nach der Spiegelformel als:

$$\vec{OP}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow P'(50|0|15).$$

Der gesuchte (gespiegelte) Bildpunkt P' ist damit: P'(50|0|15).

IV. Der Abstand des Punktes P(-30|-40|5) zur Ebene E: $8x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$ ist der Abstand des Punktes P zum Lotfußpunkt F(10|-20|10):

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{40^2 + 20^2 + 5^2} = \sqrt{2025} = 45 \text{ LE.}$$

Der Abstand zwischen Urbildpunkt P(-30|-40|5) und Bildpunkt P'(50|0|15) ist doppelt so groß:

$$d(P,P') = 2 \cdot d(P,F) = 90 \text{ LE.}$$

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)