

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe: Gegeben sind der Punkt $P(-13|19|10)$ und die Ebene E mit:

$$E: -12x_1 + 20x_2 + 9x_3 = 1.$$

Spiegle den Punkt P an der Ebene E .

Lösung: I. Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und eine Ebene $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF) können im dreidimensionalen x_1 - x_2 - x_3 -Vektorraum wie folgt zueinander liegen: a) P liegt auf/in E ; b) P liegt nicht auf/in E . Aus Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich die Lotgerade $l: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$ durch den Punkt P und senkrecht zur Ebene E konstruieren. Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Lotgeraden l in die Koordinatengleichung der Ebene E führt auf eine eindeutig lösbare Gleichung in t mit Lösung $t = t_0$, Lotgerade l und Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F , der durch Einsetzen des Parameters $t = t_0$ in die Geradengleichung l berechnet wird. Der Bildpunkt P' , der bei der Spiegelung des Punktes P an der Ebene E entsteht, errechnet sich nach der Spiegelformel:

$$\vec{OP}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} \quad (\text{bzw.: } \vec{OP}' = \vec{OF} + \vec{PF} \text{ bzw. } \vec{OP}' = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{OF}).$$

II. Zunächst wird die Parametergleichung der Lotgeraden l erstellt auf der Grundlage des Punktes $P(-13|19|10)$ und der Ebene $E: -12x_1 + 20x_2 + 9x_3 = 1$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$. Es gilt damit:

$$\text{Lotgerade } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade l wird in die einzelnen Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 zerlegt:

$$x_1 = -13 - 12t, x_2 = 19 + 20t, x_3 = 10 + 9t.$$

Einsetzen der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2, x_3 der Geradengleichung l in die Koordinatenform der Ebenengleichung E ergibt die nachstehende lineare Gleichung mit Parameter t :

$$\text{Ebene } E: -12x_1 + 20x_2 + 9x_3 = 1 \rightarrow -12(-13 - 12t) + 20(19 + 20t) + 9(10 + 9t) = 1 \quad (*).$$

Umformen der Gleichung $(*)$ (etwa Ausmultiplizieren, Zusammenfassen) führt auf:

$$-12(-13 - 12t) + 20(19 + 20t) + 9(10 + 9t) = 1 \Leftrightarrow 626 + 625t = 1 \Leftrightarrow 625t = -625 \Leftrightarrow t = -1.$$

Es folgt hinsichtlich der Lagebeziehung zwischen Lotgerade und Ebene: Die Lotgerade l und die Ebene E schneiden sich im Lotfußpunkt F . Der Lotfußpunkt F lautet:

$$\text{Parameter } t = -1 \rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} -13 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lotfußpunkt } F(-1|-1|1).$$

III. Mit dem Punkt $P(-13|19|10)$ und dem Lotfußpunkt $F(-1|-1|1)$ berechnet sich Bildpunkt P' der Spiegelung des Punktes P an der Ebene E nach der Spiegelformel als:

$$\vec{OP}' = 2 \cdot \vec{OF} - \vec{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -21 \\ -8 \end{pmatrix} \rightarrow P'(11|-21|-8).$$

Der gesuchte (gespiegelte) Bildpunkt P' ist damit: P'(11|-21|-8).

IV. Der Abstand des Punktes P(-13|19|10) zur Ebene E: $-12x_1 + 20x_2 + 9x_3 = 1$ ist der Abstand des Punktes P zum Lotfußpunkt F(-1|-1|1):

$$d(P,E) = d(P,F) = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + (-20)^2 + (-9)^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ LE.}$$

Der Abstand zwischen Urbildpunkt P(-13|19|10) und Bildpunkt P'(11|-21|-8) ist doppelt so groß:

$$d(P,P') = 2 \cdot d(P,F) = 50 \text{ LE.}$$

(KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheit)