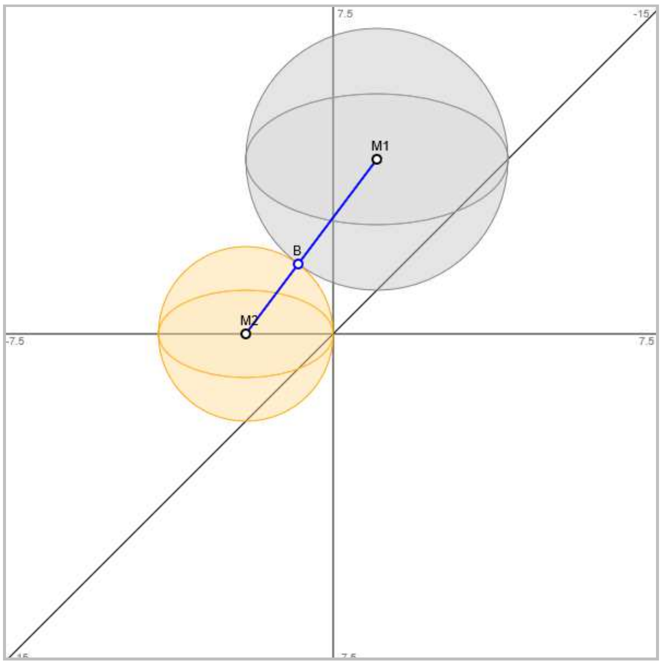
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Teilverhältnis (bei Kugeln)

Aufgabe: Die Kugel K_1 besitze den Mittelpunkt $M_1(0|1|4)$ und den Radius r = 3 Längeneinheiten, die Kugel K_2 den Mittelpunkt $M_2(0|-2|0)$. Beide Kugeln berühren sich. Bestimme den Radius der Kugel K_2 und den Berührpunkt B.



Lösung: I. Allgemein gilt: Die Verbindungsstrecke $\overline{M_1M_2}$ zwischen den Mittelpunkten M_1 und M_2 von zwei Kugeln K_1 und K_2 enthält den Berührpunkt B, an dem sich beide Kugelsphären mit Radius r (Kugel K_1) und s (Kugel K_2) berühren. Ist der Radius r der Kugel K_1 gegeben, so errechnet sich Radius s der Kugel K_2 als:

$$s = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| - r.$$

Die Kugelradien definieren ein Teilverhältnis r:s, der Berührpunkt B errechnet sich aus diesem Teilverhältnis als:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{r}{r+s}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{s}{r+s}\overrightarrow{OM_1} + \frac{r}{r+s}\overrightarrow{OM_2}\,.$$

II. Der Radius s der Kugel K_2 bestimmt sich aus $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| =$

$\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ LE mit Radius r = 3 LE der Kugel K_1 als:

$s = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| - r = 5 - 3 = 2$ LE.

III. Der Berührpunkt B zwischen den Kreismittelpunkten M_1 und M_2 liegt entsprechend dem Teilverhältnis r:s = 3:2 bei:

$$\vec{OB} = \frac{2}{3+2}\vec{OM}_1 + \frac{3}{3+2}\vec{OM}_2 = \frac{2}{5}\vec{OM}_1 + \frac{3}{5}\vec{OM}_2 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-0{,}8\\1{,}6\end{pmatrix},$$

lautet also:

B(0|-0,8|1,6).

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 1004