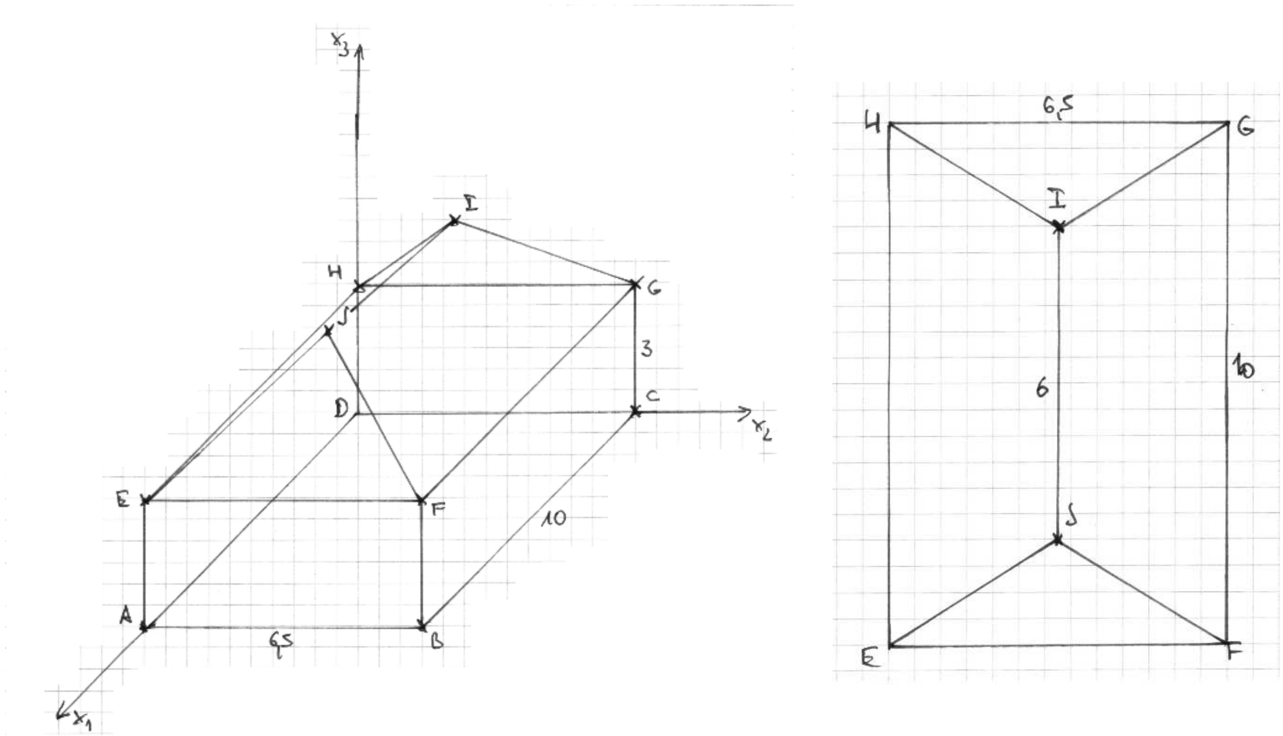
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Winkel

Aufgabe: Ein auf einer Quaderform beruhendes Haus hat die Maße: Länge 10m, Breite 6,5m, Höhe 6m, wobei das Walmdach eine Höhe von 3m einnimmt und das Dach gegenüber den Querwänden des Hauses um 2m zurückweicht.

a) Zeichne das Haus mit Dach in ein Koordinatensystem ein. Bestimme alle Eckpunkte des Hauses.
b) Bestimme die Winkel zwischen den Dachflächen und den Wänden des Hauses.
c) Bestimme den Winkel zwischen den Dachflächen des Hauses.

Lösung: a) Es ergeben sich die Zeichnungen von Haus und Dach:

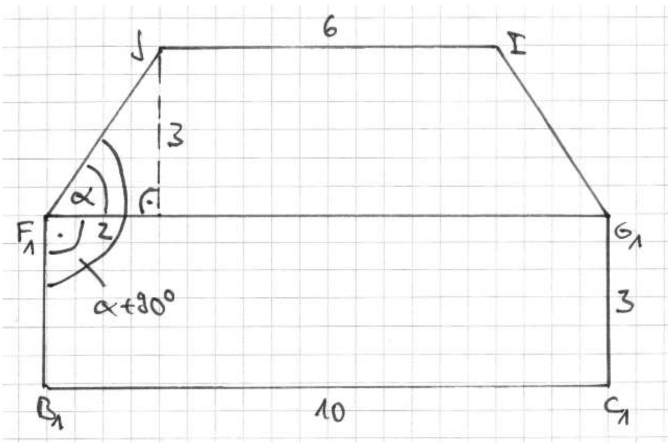


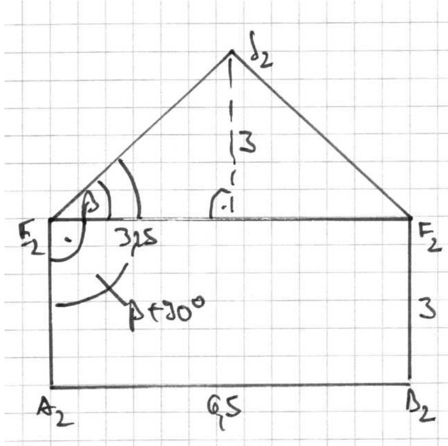
mit den Eckpunkten des Hauses: A(10|0|0), B(10|6,5|0), C(0|6,5|0), D(0|0|0), E(10|0|3), F(10|6,5|3), G(0|6,5|3), H(0|0|3), I(2|3,25|6), J(8|3,25|6).

b) Mit Hilfe trigonometrischer Überlegungen bestimmen wir zunächst die Winkel α und β zwischen der dreieckigen Dachfläche EFJ bzw. der trapezförmigen Dachfläche FGIJ und dem Boden des Dachraums EFGH entsprechend dem nachstehenden Längs- und Querschnitt durch das Haus. Wir verwenden in den rechtwinkligen Dreiecken des Längs- und Querschnitts die Tangensfunktion (Tangens = Gegenkathete/Ankathete) und errechnen:

$\tan\alpha = \frac{3}{2}$ => α = 56,3° bzw. $\tan\beta = \frac{3}{3{,}25}$ => β = 42,7°,

so dass sich als Winkel zwischen vorderer Dach- und Wandfläche $\alpha_1 = \alpha + 90° = 146{,}3°$ ergibt, als Winkel zwischen rechter Dach- und Wandfläche $\beta_1 = \beta + 90° = 132{,}7°$.





Vor dem Hintergrund der Berechnung des Winkels zwischen den Dachflächen bestimmen wir nun die Winkel α_1, β_1 mittels der Vektorrechnung. Die vordere dreieckige Dachfläche EFJ besitzt die Richtung ihres Normalenvektors $\vec{n}_{EFJ} = \vec{EF} \times \vec{EJ}$, also mit: $\vec{EF} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,5 \\ 0 \end{pmatrix}$,

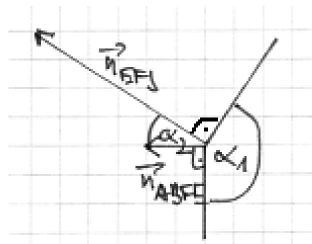
$\vec{EJ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3,25 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3,25 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\vec{n}_{EFJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3,25 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19,5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$, „gekürzt" als: $\vec{n}_{EFJ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor der vorderen Wandfläche ABFE ist: $\vec{n}_{ABFE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Winkel α_2 zwischen den beiden Normalenvektoren beträgt gemäß der Winkelformel $\cos\alpha_2 = \frac{\vec{n}_{EFJ} \cdot \vec{n}_{ABFE}}{\left|\vec{n}_{EFJ}\right| \cdot \left|\vec{n}_{ABFE}\right|}$:

$$\cos\alpha_2 = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$ => $\alpha_2 = 33,7°$.

Der Winkel zwischen Dach und Wand ergibt sich – gemäß nebenstehender Zeichnung – als:

$\alpha_2 = 360° - 90° - 90° - 33,7° = 146,3°$.



Entsprechend ergeben sich als Normalenvektoren der trapezförmigen Dachfläche FGIJ:

$\vec{n}_{FGIJ} = \vec{FG} \times \vec{FJ} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3,25 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 32,5 \end{pmatrix}$ und der rechten Hauswand BCGF: $\vec{n}_{BCGF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

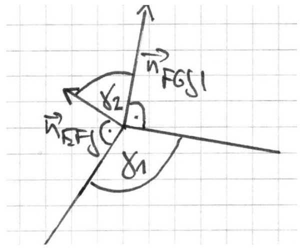
sowie als Winkel β_2 zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos\beta_2 = \frac{30}{\sqrt{30^2 + 32,5^2}} = 0,6783$$ => $\beta_2 = 47,3°$.

Analog gilt: $\beta_1 = 360° - 90° - 90° - 47,3° = 132,7°$ als Winkel zwischen Dach und Wand.

c) Der Winkel γ_1 zwischen den Dachflächen EFJ und FGJI errechnet sich

mit den Normalenvektoren $\vec{n}_{EFJ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_{FGIJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 32{,}5 \end{pmatrix}$ der Dachflächen



als:

$$\cos \gamma_2 = \frac{65}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{30^2 + 32{,}5^2}} = 0{,}4076$$ => $\gamma_2 = 65{,}9°$

und:

$\gamma_1 = 180° – 65{,}9° = 114{,}1°$

gemäß nebenstehender Zeichnung.

08.2014 / Aufgabe 41