Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Wendetangenten

Aufgabe: Bestimme die Wendetangente der Funktion:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4e^{-0,5x}.$$

Lösung: I. Allgemein lässt sich ein Wendepunkt einer Funktion f(x) bestimmen vermittelst der 2. und 3. Ableitung f''(x) und f'''(x):

f''(x) = 0 => x_1, … als mögliche Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'''(x_1) ≠ 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'''(x_1) > 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Rechts- in eine Linkskrümmung
f'''(x_1) < 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Links- in eine Rechtskrümmung usw.

Ist x_1 ein Wendepunkt der Funktion f(x), so ergibt sich die Gleichung der Wendetangente am einfachsten aus der Tangentenformel:

t_W: y = f'(x_1)(x–x_1) + f(x_1)

unter Bestimmung der Werte f(x_1) und f'(x_1). Im Wendepunkt hat zudem die Funktion f(x) den (lokal) kleinsten oder größten Ableitungswert f'(x_1), die Wendetangente schneidet dort berührend die Funktion.

II. Wir bestimmen zunächst den Wendepunkt der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4e^{-0,5x}$, indem wir die ersten drei Ableitungen bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x)=x+2e^{-0,5x}$$
$$f''(x)=1-e^{-0,5x}$$
$$f'''(x)=0,5e^{-0,5x}.$$

Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^{-0,5x}=0 \Leftrightarrow 1=e^{-0,5x} \Leftrightarrow 0=-0,5x \Leftrightarrow x=0,$$

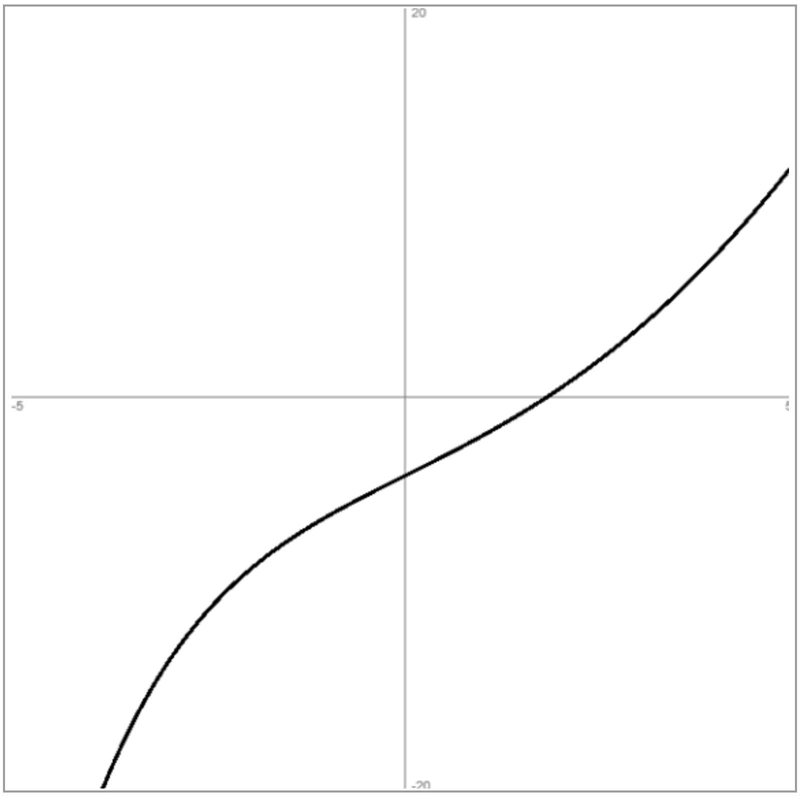
so dass die Stelle x=0 einen möglichen Wendepunkte der Funktion kennzeichnet. Mit dem Einsetzen der gefundenen Stelle in die 3. Ableitung (hinreichende Bedingung):

$$f'''(0)=0,5e^0=0,5\neq 0$$

folgt mit f(0) = $\frac{1}{2}\cdot 0^2-4e^0$ = -4 die Existenz des Wendepunkts W(0|-4) auf der y-Achse des x-y-Koordinatensystems.

III. Wertetabelle, Zeichnung der Funktion f(x):

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-4	2	0	Schnittpunkt S_y(0|-4) = Wendepunkt W(0|-4)
1.8	0	2.61	0.59	Nullstelle N(1.8|0)



IV. Die Wendetangente ist die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x=0. Für den Wendepunkt W(0|-4) ergibt sich wegen f'(0) = $0+2e^0$ = 2 und f(0) = -4:
t_W: y = f'(0)(x–0) + f(0) = 2(x–0) – 4 = 2x–4
als Gleichung der Wendetangente.