Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Wendetangenten

Aufgabe: Bestimme die Wendetangente der Funktion:

$$f(x) = 4e^{0,5x} - e^{-x}.$$

Lösung: I. Allgemein lässt sich ein Wendepunkt einer Funktion f(x) bestimmen vermittelst der 2. und 3. Ableitung f''(x) und f'''(x):

f''(x) = 0 => x_1, … als mögliche Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'''(x_1) ≠ 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'''(x_1) > 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Rechts- in eine Linkskrümmung
f'''(x_1) < 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Links- in eine Rechtskrümmung usw.

Im Wendepunkt hat zudem die Funktion f(x) den (lokal) kleinsten oder größten Ableitungswert f'(x_1), die Wendetangente schneidet dort berührend die Funktion.
Ist x_1 ein Wendepunkt der Funktion f(x), so ergibt sich die Gleichung der Wendetangente im Punkt W(x_1|f(x_1)) die Geradengleichung t: y = mx + c; m ist dann die Tangentensteigung m = f'(x_1), c der y-Achsenabschnitt der Tangente mit c = f(x_1) – f'(x_1)·x_1.

II. Wir bestimmen zunächst den Wendepunkt der Funktion $f(x) = 4e^{0,5x} - e^{-x}$, indem wir die ersten drei Ableitungen bilden:

$$f'(x) = 2e^{0,5x} + e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{0,5x} - e^{-x}$$
$$f'''(x) = 0,5e^{0,5x} + e^{-x}.$$

Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f''(x) = e^{0,5x} - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = e^{-x} \Leftrightarrow 0,5x = -x \Leftrightarrow 1,5x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

so dass die Stelle x=0 einen möglichen Wendepunkte der Funktion kennzeichnet. Mit dem Einsetzen der gefundenen Stelle in die 3. Ableitung (hinreichende Bedingung):

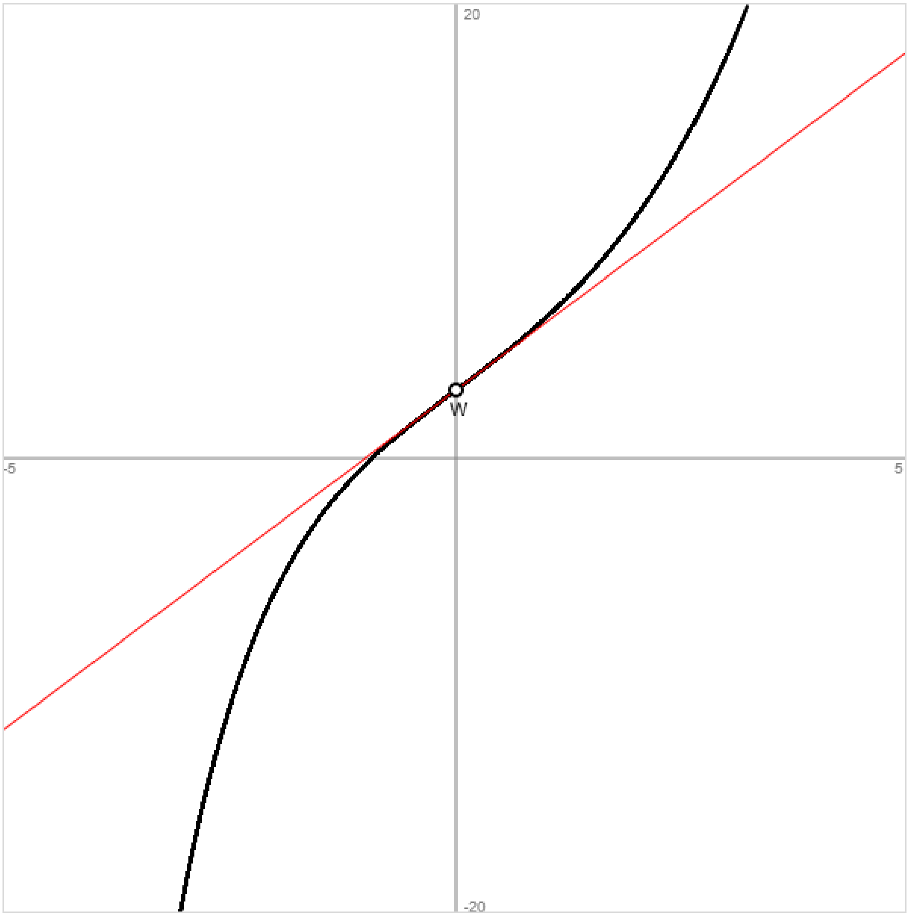
$$f'''(0) = 0,5e^0 + e^0 = 0,5 + 1 = 1,5 \neq 0$$

folgt mit $f(0) = 4e^0 - e^0$ = 4 – 1 = 3 die Existenz des Wendepunkts W(0|3) auf der y-Achse des x-y-Koordinatensystems.

III. Die Wendetangente ist die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x=0. Für den Wendepunkt W(0|3) gilt: f(0) = 3, $f'(0) = 2e^0 + e^0$ = 2 + 1 = 3. Daneben trägt der Ansatz t: y = mx + c für die Tangentengleichung. Es gilt weiter: m = f'(0) = 3, so dass t: y = 3x + c folgt. Wegen f(0) = 3 wird die Tangente im Punkt P(0|3) errechnet. Punktprobe mit x=0 und y=3 ergibt mit dem Einsetzen in die Tangentengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt c:

3 = 3·0 + c ⇔ 3 = c.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: y = 3x + 3.



www.michael-buhlmann.de / 01.2025 / Aufgabe 2342