Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Wurzelgleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der Wurzelgleichung:

$$\sqrt{x^2+9} = 2x-3.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von Wurzelgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x und Termen, die eine Wurzel, vorzugsweise eine Quadratwurzel darstellen, die folgende Vorgehensweise: Im Falle, dass die Gleichung Quadratwurzelterme enthält, ist die Gleichung nach eventuellen Term- und Gleichungsumformungen durch Quadrieren in eine lineare oder quadratische Gleichung zu überführen (Verwendung von binomischen Formeln). Lineare Gleichungen genügen dabei der Form ax + b = 0 (*) mit reellen Zahlen a, b; die Lösung der linearen Gleichung (*) ist für a≠0 dann: $x = -\frac{b}{a}$. Quadratische Gleichungen sind Gleichungen von der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (**) mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0; die Lösungen der quadratischen Gleichung (**) sind: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel); ist zudem c=0, so lassen sich die Lösungen von (**) über das Ausklammern und den Satz vom Nullprodukt ermitteln. Um eine lineare oder quadratische Gleichung der Form (*) oder (**) zu erlangen, sind zudem nach dem Quadrieren der Wurzelgleichung Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen. Da das Quadrieren einer Gleichung mit Quadratwurzeltermen keine Äquivalenzumformung ist, sich die Lösung der Gleichung mithin ändert, muss nach Ermittlung der eventuellen Lösungen noch eine Probe mit der vorgegebenen Wurzelgleichung durchgeführt werden. Nur eventuelle Lösungen mit erfolgreicher Probe sind Lösungen der Wurzelgleichung, alle anderen sind Scheinlösungen.

II. Wir gehen wie folgt bei den Gleichungsumformungen vor:

$\sqrt{x^2+9} = 2x-3$	$\mid ()^2$
$x^2 + 9 = (2x-3)^2$	(2. binomische Formel)
$x^2 + 9 = 4x^2 - 12x + 9$	$\mid -9$
$x^2 = 4x^2 - 12x$	$\mid -x^2$
$0 = 3x^2 - 12x$	(Ausklammern)
$0 = x(3x-12)$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 3x - 12 = 0$	$\mid +12$
$x = 0,\ 3x = 12$	$\mid :3$
$x_1 = 0,\ x_2 = 4$	

III. Probe: Es gilt für $x_1=0$: $\sqrt{0^2+9} = \sqrt{9} = 3 \neq -3 = 2\cdot 0 - 3$, so dass $x_1 = 0$ eine Scheinlösung der Wurzelgleichung ist. Für $x_2=4$ gilt: $\sqrt{4^2+9} = \sqrt{25} = 5 = 2\cdot 4 - 3$, so dass wir mit $x_2 = 4$ die einzige Lösung der Wurzelgleichung erhalten. Wir haben damit als Lösungsmenge: L = {4}.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1170