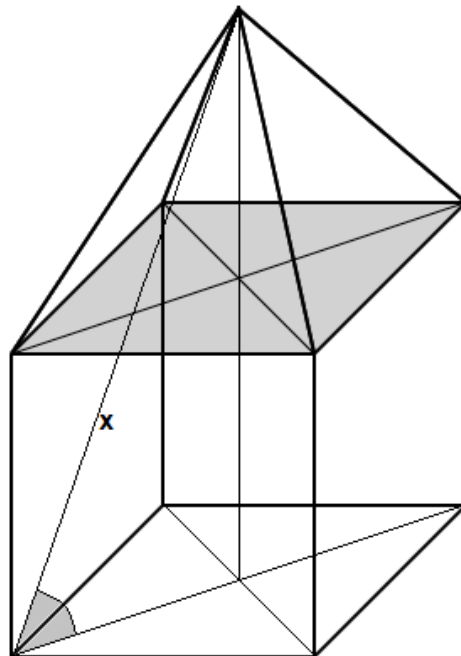


Mathematikaufgaben

- > Geometrie/Körperberechnung
- > Zusammengesetzte Körper
- > Pyramide und Würfel

Aufgabe: Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einer quadratischen Pyramide und einem Würfel. Die Grundfläche der Pyramide ist eine Fläche des Würfels, die Würfelflächen sind jeweils 81 cm^2 groß. Das Volumen des zusammengesetzten Körpers beträgt 945 cm^3 . Bestimme die Gesamthöhe des Körpers und dessen Oberfläche, die Strecke x zwischen der Ecke der Würfelgrundfläche und der Pyramidenspitze und den Winkel zwischen dieser Strecke und der Grundfläche des Würfels.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a , b , c und den Winkeln α , β , γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

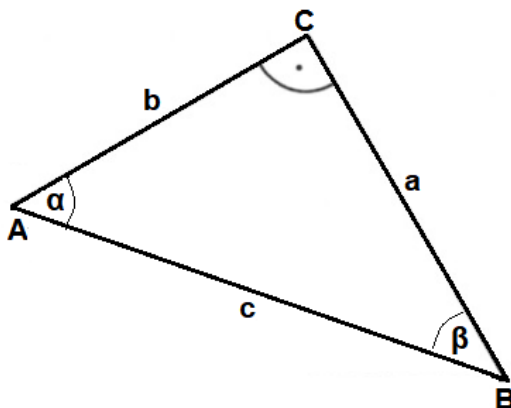
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

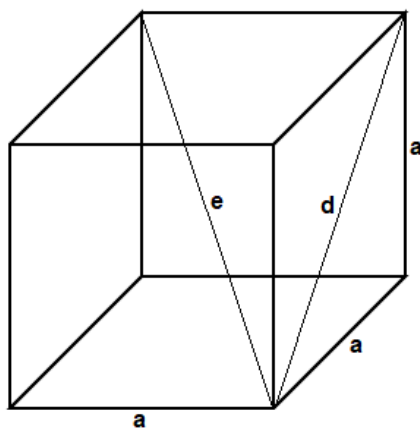
$$A = \frac{1}{2} ab.$$



Wegen $\tan \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \tan \beta$ bzw. $\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \tan \alpha$ gelten noch die Flächenformeln:

$$A = \frac{1}{2} a^2 \tan \beta, \quad A = \frac{1}{2} b^2 \tan \alpha.$$

II. Ein Würfel ist ein Quader mit gleichen Kantenlängen a . Daraus ergeben sich der Oberflächeninhalt O , das Volumen V sowie die Seiten- bzw. Raumdiagonale d und e .



Würfel, Kanten, Seiten-, Raumdiagonale

In einem Würfel gelten dann die folgenden Beziehungen:

Würfel

Grund-/Deckfläche

$$G = a^2$$

$$a = \sqrt{G}$$

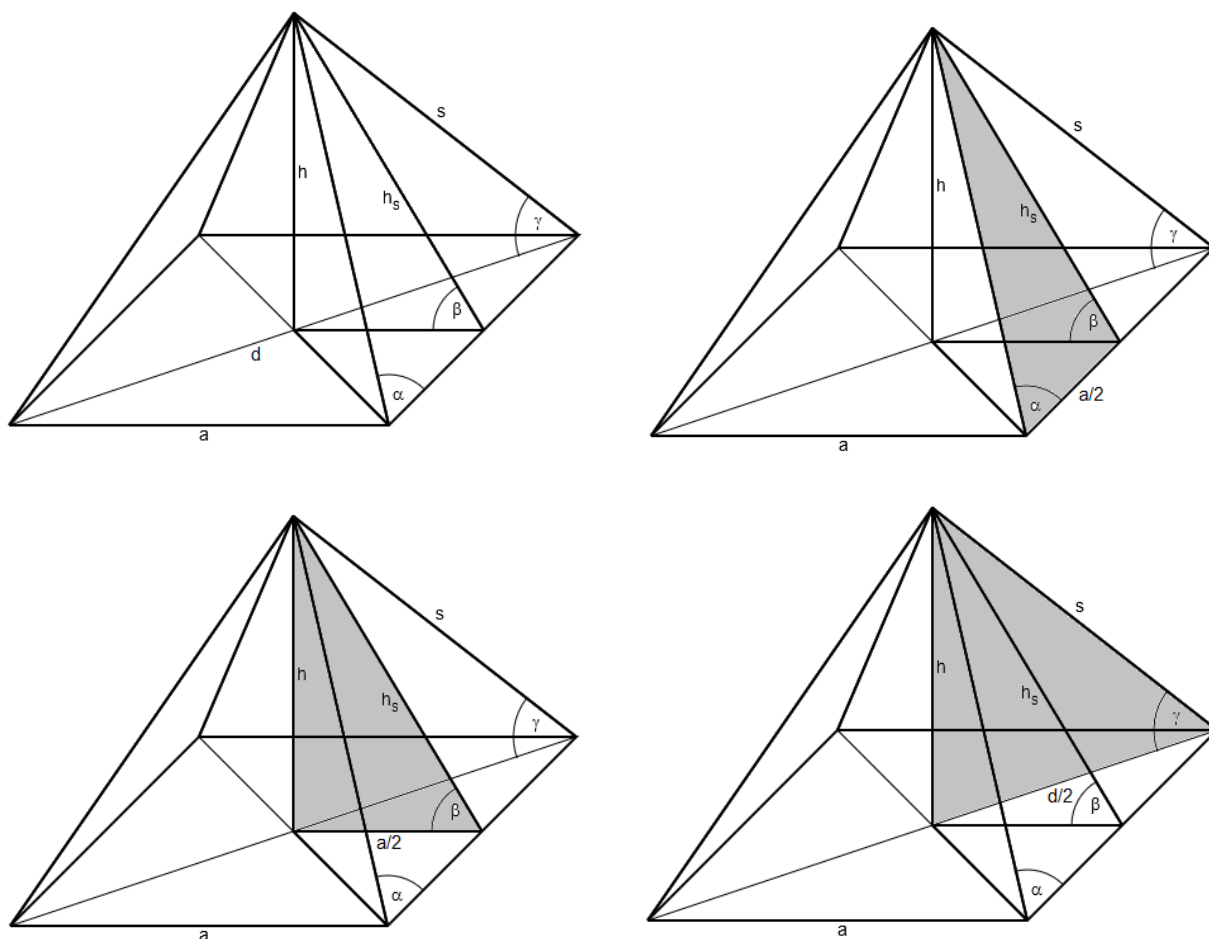
Würfelumfang

$$u = 4a$$

$$a = \frac{u}{4}$$

Oberfläche	$O = 6a^2$		$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$
Mantelfläche	$M = 4a^2$		$a = \sqrt{\frac{M}{4}}$
Volumen	$V = G \cdot a = a^3$	$G = \frac{V}{a}$	$a = \sqrt[3]{V}$
Seitendiagonale	$d = a\sqrt{2}$		$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$
Raumdiagonale	$e = a\sqrt{3}$		$e = \frac{d}{\sqrt{3}}$

III. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s , die Kantenlänge s , die Oberfläche O , die Mantelfläche M , die Grundfläche G und das Volumen V .



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$
Grundflächen- diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
Oberfläche	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan \beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan \gamma = \frac{2h}{d}$

IV. Aus der Grundfläche $G = 81 \text{ cm}^2$ der quadratischen Pyramide ergibt sich die Grundkante:

$$a = \sqrt{81} = 9 \text{ cm},$$

die gleichzeitig die Würfelkante ist.

V. Es ist $V_{\text{ges}} = 945 \text{ cm}^3$ das Volumen des zusammengesetzten Körpers und weiter:

$$V_{\text{ges}} = V_W + V_P \quad (*)$$

mit V_P als Pyramiden- und V_W als Würfelvolumen. Nun ist wegen $V_W = a^3$ bei $a = 9 \text{ cm}$ der Rauminhalt des Würfels:

$$V_W = 9^3 = 729 \text{ cm}^3.$$

Das Pyramidenvolumen ist somit wegen der Beziehung (*):

$$V_P = V - V_W = 945 - 729 = 216 \text{ cm}^3.$$

VI. Mit dem Pyramidenvolumen $V_P = 216 \text{ cm}^3$ lässt sich die Pyramidenhöhe h_P bestimmen:

$$V_P = \frac{1}{3}a^2h_P \Rightarrow h_P = \frac{3V_P}{a^2} = \frac{3 \cdot 216}{9^2} = 8 \text{ cm}.$$

VII. Die Höhe h des zusammengesetzten Körpers ist dann wegen der Höhe des Würfels als Würfelkante $a = 9 \text{ cm}$:

$$h = a + h_P = 9 + 8 = 17 \text{ cm}.$$

VIII. Die Oberfläche O_{ges} des zusammengesetzten Körpers errechnet sich gemäß:

$$O_{\text{ges}} = G + M_W + M_P$$

mit $M_W = 4a^2$ als Mantelfläche des Würfels (als Prisma) und $M_P = 2ah_s$ als Mantelfläche der

quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt nach Aufgabenstellung $G = 81 \text{ cm}^2$, die Würfelmantelfläche ist:

$$M_W = 4 \cdot 9^2 = 324 \text{ cm}^2.$$

Wegen der Pyramidenseitenhöhe h_s mit:

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s^2 = 8^2 + 4,5^2 = 84,25 \Rightarrow h_s = \sqrt{84,25} = 9,18 \text{ cm}$$

ist die Pyramidenmantelfläche:

$$M_P = 2 \cdot 9 \cdot 9,18 = 165,24 \text{ cm}^2.$$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ist somit:

$$O_{\text{ges}} = G + M_W + M_P = 81 + 324 + 165,24 = 570,24 \approx 570,2 \text{ cm}^2.$$

IX. Die Strecke x zwischen der Ecke der Würfelgrundfläche und der Pyramidenspitze ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Diagonaldreiecks im zusammengesetzten Körper, das gebildet wird von der Körperhöhe h , der halben Grundflächendiagonalen $d/2$ als Katheten und eben der Strecke x . In der Würfelgrundfläche ist die Grundflächendiagonale d

$$d = 9\sqrt{2} = 12,73 \text{ cm}$$

groß. Die Länge der halben Grundflächendiagonalen beträgt damit:

$$\frac{d}{2} = 6,36 \text{ cm}.$$

Mit der Körperhöhe $h = 17 \text{ cm}$ ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras als Länge der Strecke x :

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 17^2 + 6,36^2 = 329,5 \Rightarrow x = \sqrt{329,5} = 18,15 \text{ cm}.$$

X. Der Winkel im Diagonaldreieck des zusammengesetzten Körpers ist nun noch zu ermitteln. Der Name des Winkels sei φ , die Winkelgröße errechnet sich z.B. mit Hilfe des Tangens aus den Katheten des Diagonaldreiecks h und $d/2$:

$$\tan \varphi = \frac{h}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{17}{6,36} = 2,67 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(2,67) = 69,49^\circ \approx 69,5^\circ.$$

Damit ist alles bestimmt.