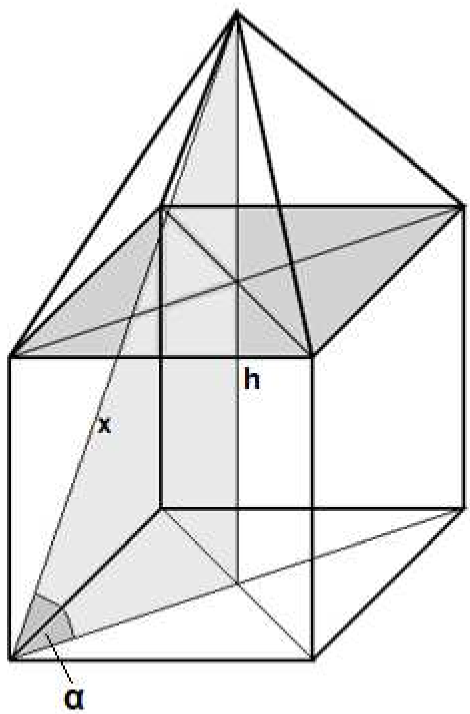
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Zusammengesetzte Körper
> Pyramide und Würfel

Aufgabe: Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einer quadratischen Pyramide und einem Würfel. Die Grundfläche der Pyramide ist eine Fläche des Würfels, die Würfelflächen sind jeweils 81 cm^2 groß. Das Diagonaldreieck des zusammengesetzten Körpers wird u.a. begrenzt durch die Körperhöhe h und der Strecke x zwischen der Ecke der Würfelgrundfläche und der Pyramidenspitze. Der Winkel im Diagonaldreieck beträgt α = 69,5°. Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$ (Winkel β)

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

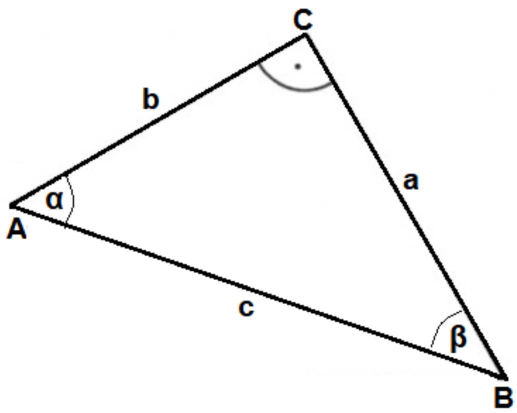
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

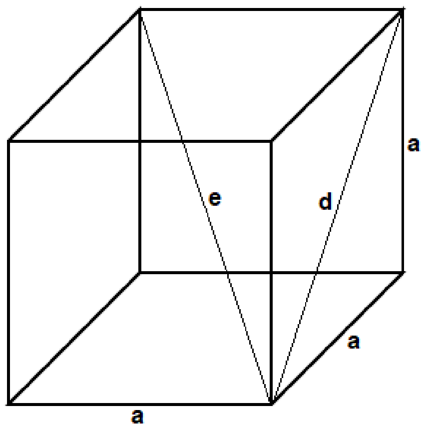
$$A = \frac{1}{2}ab.$$



Wegen $\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\tan\beta$ bzw. $\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\tan\alpha$ gelten noch die Flächenformeln:

$$A = \frac{1}{2}a^2\tan\beta,\ A = \frac{1}{2}b^2\tan\alpha.$$

II. Ein Würfel ist ein Quader mit gleichen Kantenlängen a. Daraus ergeben sich der Oberflächeninhalt O, das Volumen V sowie die Seiten- bzw. Raumdiagonale d und e.



Würfel, Kanten, Seiten-, Raumdiagonale

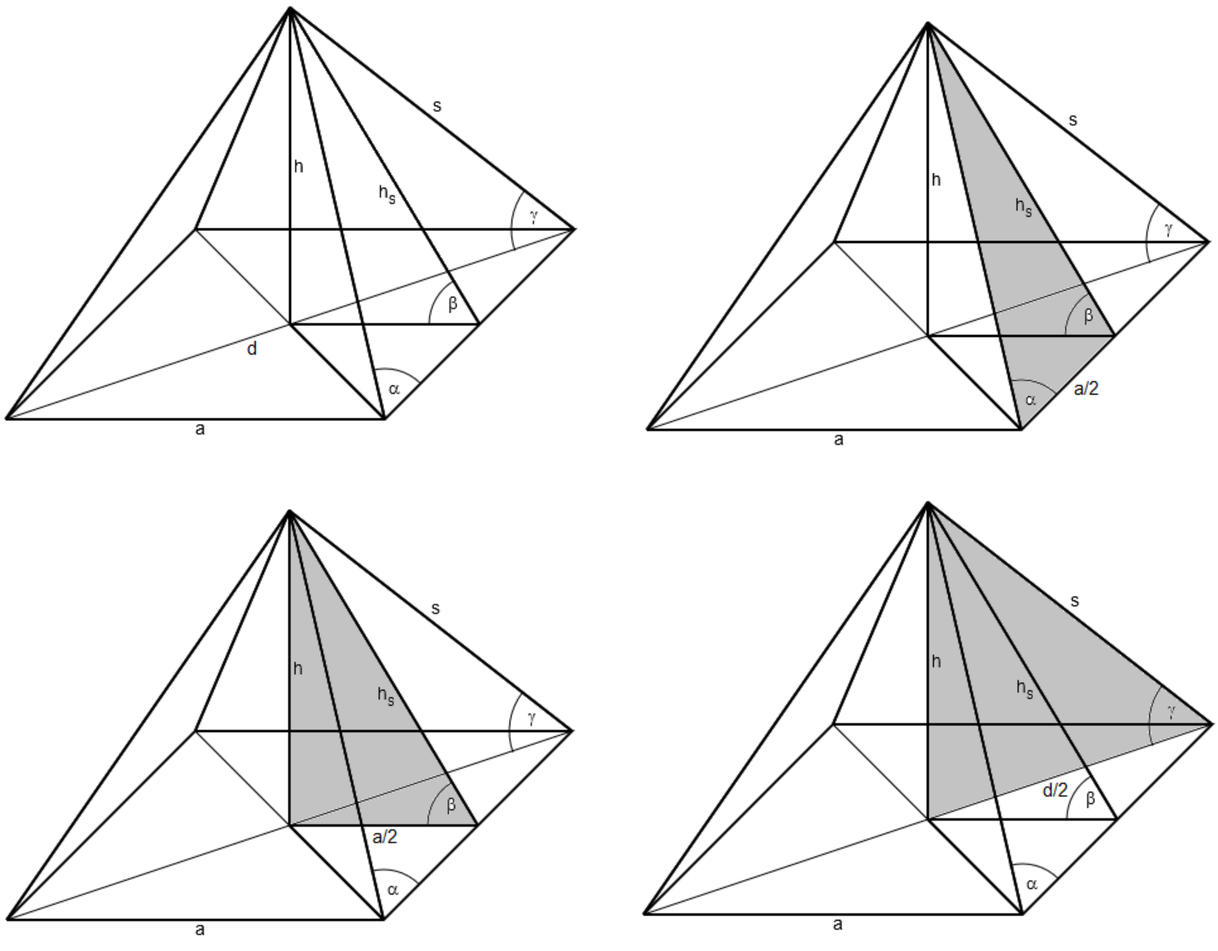
In einem Würfel gelten dann die folgenden Beziehungen:

Würfel

Grund-/Deckfläche	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$
Würfelumfang	u = 4a	$a = \frac{u}{4}$

Oberfläche	$O = 6a^2$		$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$
Mantelfläche	$M = 4a^2$		$a = \sqrt{\frac{M}{4}}$
Volumen	$V = G \cdot a = a^3$	$G = \frac{V}{a}$	$a = \sqrt[3]{V}$
Seitendiagonale	$d = a\sqrt{2}$		$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$
Raumdiagonale	$e = a\sqrt{3}$		$e = \frac{d}{\sqrt{3}}$

III. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

IV. Aus der Grundfläche G = 81 cm^2 der quadratischen Pyramide ergibt sich die Grundkante:

$a = \sqrt{81} = 9$ cm,

die gleichzeitig die Würfelkante ist.

V. Die halbe Grundflächendiagonale d/2 und die Höhe h des zusammengesetzten Körpers sind die Katheten im rechtwinkligen Diagonaldreieck des Körpers mit der Strecke x als Hypotenuse. In der Würfelgrundfläche ist die Grundflächendiagonale:

$d = 9\sqrt{2} = 12{,}73$ cm

groß. Die Länge der halben Grundflächendiagonalen beträgt damit:

$\frac{d}{2} = 6{,}36$ cm.

VI. Auf Grund des Winkels α = 69,5° beträgt die Höhe h des zusammengesetzten Körpers wegen:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \tan 69{,}5° = \frac{h}{6{,}36} \Rightarrow h = 6{,}36 \cdot \tan 69{,}5° = 17 \text{ cm.}$$

VII. Es ergibt sich dann wegen der Höhe des Würfels als Würfelkante a = 9 cm:

$h = a + h_P \Rightarrow h_P = h - a = 17 - 9 = 8$ cm.

Die Pyramidenhöhe beträgt also: $h_P = 8$ cm.

VIII. Das Volumen V_{ges} des zusammengesetzten Körpers setzt sich aus dem Würfelvolumen

$V_W = a^3$ und dem Pyramidenvolumen $V_P = \frac{1}{3} a^2 h_P$ zusammen:

$V_{ges} = V_W + V_P$.

Mit der Kante a = 9 cm und der Pyramidenhöhe h_P = 8 cm errechnen sich:

$V_W = 9^3 = 729$ cm^3

$V_P = \frac{1}{3} a^2 h_P = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 8 = =$ 216 cm^3,

so dass das Gesamtvolumen:

$V_{ges} = 729 + 216 = 945$ cm^3

beträgt.

IX. Die <u>Oberfläche</u> O_{ges} <u>des zusammengesetzten Körpers</u> errechnet sich gemäß:

$O_{ges} = G + M_W + M_P$

mit $M_W = 4a^2$ als Mantelfläche des Würfels (als Prisma) und $M_P = 2ah_s$ als Mantelfläche der quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt nach Aufgabenstellung G = 81 cm^2, die Würfelmantelfläche ist:

$M_W = 4 \cdot 9^2 = 324$ cm^2.

Wegen der Pyramidenseitenhöhe h_s mit:

$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s^2 = 8^2 + 4{,}5^2 = 84{,}25 \Rightarrow h_s = \sqrt{84{,}25} = 9{,}18$ cm

ist die Pyramidenmantelfläche:

$M_P = 2 \cdot 9 \cdot 9{,}18 = 165{,}24$ cm^2.

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ist somit:

$O_{ges} = G + M_W + M_P = 81 + 324 + 165{,}24 = 570{,}24 \approx 570{,}2$ cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 02.2020 / Aufgabe 982