Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Analysis
> Ableitungen I

Einleitung: Ganz rationale Funktionen f: **R** -> **R** besitzen den Funktionsterm:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n; $a_n \neq 0$); n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Die Ableitung einer Funktion in einem Funktionspunkt ergibt sich als momentane Änderungsrate, als Grenzwert von mittleren Änderungsraten, als Steigung einer die Funktion annähernden Tangente, als Steigung der Funktion im Funktionspunkt als Berührpunkt von Funktion und Tangente. Für die Ableitungen von ganz rationalen Funktionen gelten:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + ... + 6a_3$$

gemäß den Ableitungsregeln:

(f(x) + c)' = f'(x) (additive Konstante)
[c·f(x)]' = c·f'(x) (konstanter Faktor)
(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) (Summenregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/reelle n)
f‘‘(x) = (f‘(x))‘ (2. Ableitung)
f‘‘‘(x) = (f‘‘(x))‘ (3. Ableitung).

Die Ableitungen können mathematisch unter verschiedenen Fragestellungen betrachtet werden: Ableitung/Steigung an einer bestimmten Stelle x_0, in einem bestimmten Punkt $P(x_0|f(x_0))$; Ermittlung von Stellen bzw. Funktionspunkten mit bestimmter Steigung, waagerechte Tangenten; Bestimmung von Tangenten und Normalen; höhere Ableitungen.

Aufgabe 1: Bilde die 1. Ableitung der ganz rationalen Funktion f(x).

a) $f(x) = x^5 - 1$

b) $f(x) = -\frac{x^6}{2} + 12$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x + 3$

d) $f(x) = \frac{5}{4}x^3 - x - 10$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 4$

f) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

g) $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x$

h) $f(x) = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{7}x^2 - 23$

i) $f(x) = (2x-5)^2$

j) $f(x) = \frac{1}{2}x(x+3) - \frac{1}{3}x + 5$

k) $f(x) = \frac{x^2}{4}(4-x^2)^2$

l) $f(x) = -\frac{2}{5}(x^3+1)(x^2-2)$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen.

Lösungen: a) $f'(x) = 5x^4$; b) $f'(x) = -3x^5$; c) $f'(x) = -2x^3+2$; d) $f'(x) = 15x^2/4-1$; e) $f'(x) = x^2+4x-5$; f) $f'(x) = x^3-2x^2+x+1$; g) $f'(x) = 8x^3-14x+3$; h) $f'(x) = -12x^2/5+24x/7$; i) $f(x) = 4x^2-20x+25$ -> $f'(x) = 8x-20$; j) $f(x) = 0,5x^2-7x/6+5$ -> $f'(x) = x-7/6$; k) $f(x) = (16x^2-8x^4+x^6)/4$ -> $f'(x) = 32x-32x^3+6x^5)/4$; l) $f(x) = -2(x^5-2x^3+x^2-2)/5$ -> $f'(x) = -2(5x^4-6x^2+2x)/5$.

Aufgabe 2: Berechne die Steigung der ganz rationalen Funktion f(x) an der Stelle x_0.

a) $f(x) = -0{,}5x^2$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 + 1$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = -\frac{3}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3$, $x_0 = -1$

d) $f(x) = x^5 - x^2 + x$, $x_0 = \frac{1}{2}$

e) $f(x) = x^4(1 - x^3)$, $x_0 = -1$

f) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 - 4x$, $x_0 = -\frac{1}{2}$

g) $f(x) = \frac{1}{3}x^3(x^2 + 4)$, $x_0 = \sqrt{5}$

h) $f(x) = \frac{x^6 - 2x^4 + 4x}{8}$, $x_0 = 4$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. In den Term der Ableitung wird für x der Wert von x_0 eingesetzt und die Steigung berechnet.

Lösungen: a) $f'(x) = -x \rightarrow f'(2) = -2$; b) $f'(x) = 0{,}75x^2+4x \rightarrow f'(1) = 4{,}75$; c) $f'(x) = -6x^3/5-6x^2/5 \rightarrow f'(-1) = 0$; d) $f'(x) = 5x^2-2x+1 \rightarrow f'(0{,}5) = 5/4 = 1{,}25$; e) $f(x) = x^4-x^7 \rightarrow f'(x) = 4x^3-7x^6 \rightarrow f'(1) = -11$; f) $f'(x) = 3x^4+5x-4 \rightarrow f'(-0{,}5) = -101/16 = -6{,}3125$; g) $f(x) = (x^5+4x^3)/3 \rightarrow f'(x) = (5x^4+12x^2)/3 \rightarrow f'(\sqrt{5}) = (125+60)/3= 185/3$; h) $f(x) = x^6/8-x^4/4+x/2 \rightarrow f'(x) = 3x^5/4-x^3+0{,}5 \rightarrow f'(4) = 704{,}5$.

Aufgabe 3: Berechne die Steigung der ganz rationalen Funktion f(x) im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

a) $f(x) = x^2 - 3$, P(-3|6)

b) $f(x) = -0{,}5x^3 - 6x + 11$, P(2|f(2))

c) $f(x) = x^2(x - 5)$, P(5|0)

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x$, P(0|0)

e) $f(x) = (x^2 + x)^2$, P(-2|4)

f) $f(x) = \frac{2}{7}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 8$, P(0,5|f(0,5))

g) $f(x) = 2x^6 - 5x^3 + 2x - 7$, P(-1|f(-1))

h) $f(x) = -\frac{5}{4}x^4 - x^3 - x$, P(1|f(1))

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. In den Term der Ableitung wird für x der Wert von x_0 eingesetzt und die Steigung berechnet.

Lösungen: a) $f'(x) = 2x \rightarrow f'(-3) = -6$; b) $f'(x) = -1{,}5x^2-6 \rightarrow f'(2) = -10$; c) $f(x) = x^3-5x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2-10x \rightarrow f'(5) = 25$; d) $f'(x) = 2x^3+x^2+1 \rightarrow f'(0) = 1$; e) $f(x) = x^4+2x^3+x^2 \rightarrow f'(x) = 4x^3+6x^2+2x \rightarrow f'(-2) = -12$; f) $f'(x) = 8x^3/7-3x/2 \rightarrow f'(0{,}5) = -17/28$; g) $f'(x) = 12x^5-15x^2+2 \rightarrow f'(-1) = -25$; h) $f'(x) = -5x^3-3x^2-1 \rightarrow f'(1) = -9$.

Aufgabe 4: Bestimme die Stellen x_0, an denen die ganz rationale Funktion f(x) die Steigung m besitzt.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 5$, m = -2

b) $f(x) = 0{,}2x^2 - 5x + 1$, m = -1

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$, m = 5

d) $f(x) = x^5 - 5x - 12$, m = 0

e) $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{2}$, m = 0

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 - 4x$, m = 2

g) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4$, m = -1

h) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10x$, m = 10

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt ($f'(x) = m$), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt.

Lösungen: a) $f'(x) = 0{,}5x = -2 \Leftrightarrow x=-4$; b) $f'(x) = 0{,}4x-5 = -1 \Leftrightarrow 0{,}4x = 4 \Leftrightarrow x=10$; c) $f'(x) = x^2+1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x=\pm2$; d) $f'(x) = 5x^4-5 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 = 5 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x=\pm1$; e) $f(x) = 0{,}5x^4+0{,}5x^2 \rightarrow f'(x) = 2x^3+x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x=0$; f) $f'(x) = x^2-5x-4 = 2 \Leftrightarrow x^2-5x-6 = 0 \Leftrightarrow x=-1, x=6$; g) $f'(x) = x^4-2x^2 = -1 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x=\pm1$; h) $f'(x) = 4x^3-12x^2+10 = 10 \Leftrightarrow x^2(4x-12) = 0 \Leftrightarrow x=0, x=3$.

Aufgabe 5: Bestimme die Punkte $P(x_0|f(x_0))$, in denen die ganz rationale Funktion f(x) die Steigung m besitzt.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$, m = 4 | b) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + 2x + 1$, m = 4,4

c) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x$, m = 5 | d) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 22x$, m = -2

e) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 9$, m = 0 | f) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-11)$, m = -1,5

g) $f(x) = x^3(x^2 - 3)$, m = 44 | h) $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + x$, m = -7

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt (f'(x) = m), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Der Wert x wird dann in die Funktion f(x) eingesetzt und der Funktionspunkt P auf diese Weise ermittelt.

Lösungen: a) f'(x) = 4x-4 = 4 ⇔ 4x = 8 ⇔ x=2 -> f(2) = 0 -> P(2|0); b) f'(x) = $0{,}6x^2$+2 = 4,4 ⇔ $0{,}6x^2$ = 2,4 ⇔ x^2 = 4 ⇔ x=±2 -> f(-2) = -4,6, f(2) = 6,6 -> P_1(-2|-4,6), P_2(2|6,6); c) f'(x) = $3x^2$+10x-8 = 5 ⇔ $3x^2$+10x-13 = 0 ⇔ x=-13/3, x=1 -> f(-13/3) = -598/27, f(1) = -2 -> P_1(-13/3|-598/27), P_2(1|-2); d) f'(x) = $3x^3$+22 = -2 ⇔ $3x^3$ = -24 ⇔ x^3 = -8 ⇔ x=-2 -> f(-2) = -32 -> P(-2|-32); e) f'(x) = $4x^3$+$24x^2$ = 0 ⇔ x^2(4x+24) = 0 ⇔ x=-6, x=0 -> f(-6) = -441, f(0) = -9 -> P_1(-6|-441), P_2(0|-9); f) f(x) = $0{,}5x^2$-4,5x-11 -> f'(x) = x-4,5 = -1,5 ⇔ x=3 -> f(3) = -20 -> P(3|-20); g) f(x) = x^5-$3x^3$ -> f'(x) = $5x^4$-$9x^2$ = 44 ⇔ $5x^4$-$9x^2$-44 = 0 ⇔ x^2 = -2,2, x^2 = 1 ⇔ x=±1 -> f(-1) = 2, f(1) =-2 -> P_1(-1|2), P_2(1|-2); h) f'(x) = $6x^2$+16x+1 = -7 ⇔ $6x^2$+16x+8 = 0 ⇔ $3x^2$+8x+4 = 0 ⇔x=-2, x=-2/3 -> f(-2) = 14, f(-2/3) = 62/27 -> P_1(-2|14), P_2(-2/3|62/27).

Aufgabe 6: Bestimme die Punkte $P(x_0|f(x_0))$, in denen die ganz rationale Funktion f(x) waagerechte Tangenten besitzt.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ | b) $f(x) = -2x^2 - 6x - 5$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2$ | d) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 4x + 3$

e) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 24x$ | f) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

g) $f(x) = 3x^5 - 85x^3 + 240x$ | h) $f(x) = -2x^8 - 16x + 9$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung (hier 0) gesetzt (f'(x) = 0), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Der Wert x wird dann in die Funktion f(x) eingesetzt und der Funktionspunkt P auf diese Weise ermittelt.

Lösungen: a) f'(x) = 2x-4 = 0 ⇔ 2x = 4 ⇔ x=2 -> f(2) = 5 -> P(2|5); b) f'(x) = -4x-6 = 0 ⇔ -6 = 4x ⇔ x=-1,5 -> f(-1,5) = -18,5 -> P(-1,5|-18,5); c) f'(x) = $3x^2$-4x = 0 ⇔ x(3x-4) = 0 ⇔ x=0, x=4/3 -> f(0) = 0, f(4/3) = -32/27 -> P_1(0|0), P_2(4/3|-32/27); d) f'(x) = $-2x^2$-4 = 0 ⇔ -4 = $2x^2$ ⇔ x^2 = -2 -> keine Lösung; e) f'(x) = $3x^3$-24 = 0 ⇔ $3x^3$ = 24 ⇔ x^3 = 8 ⇔ x=2 -> f(2) = -36 -> P(2|-36); f) f'(x) = $0{,}5x^3$+x^2-4x = 0 ⇔ x($0{,}5x^2$+x-4) = 0 ⇔ x=0, x^2+2x-8 = 0 ⇔ x=-4, x=0, x=2 -> f(-4) = -64/3, f(0) = 0, f(2) = -10/3 -> P_1(-4|-64/3), P_2(0|0), P_3(2|-10/3); g) f'(x) = $15x^4$-$255x^2$+240 = 0 ⇔ x^4-$17x^2$+16 = 0 ⇔ x^2 = 1, x^2 = 4 ⇔ x=±1, x=±2 -> f(-2) = 104, f(-1) = -158, f(1) = 158, f(2) = -104 -> P_1(-2|104), P_2(-1|-158), P_3(1|158), P_4(2|-104); h) f'(x) = $-16x^7$-16 = 0 ⇔ -16 = $16x^7$ ⇔ x^7 = -1 ⇔ x=-1 -> f(-1) = 23 -> P(-1|23).

Aufgabe 7: Berechne zur ganz rationalen Funktion f(x) an der Stelle x_0 die Gleichung der Tangente.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$, x_0 = 1 | b) $f(x) = x^3 - 4x^2$, x_0 = -1

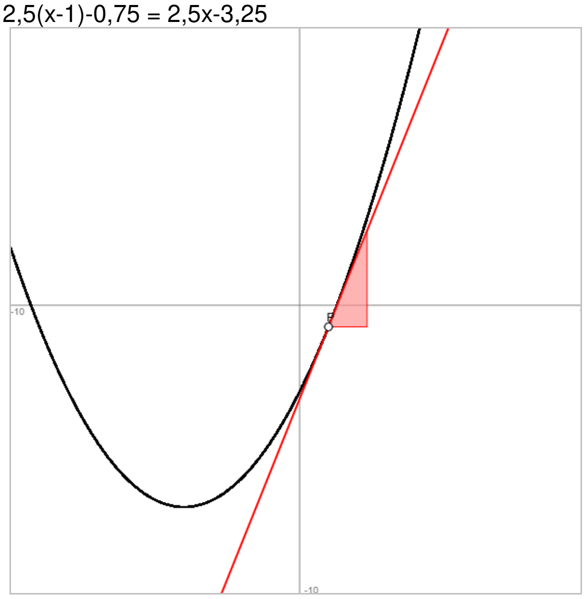
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, x_0 = 2 | d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$, x_0 = -3

e) $f(x) = -x^3(1 + 2x)$, x_0 = 0 | f) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - x^2 - 16$, x_0 = 4

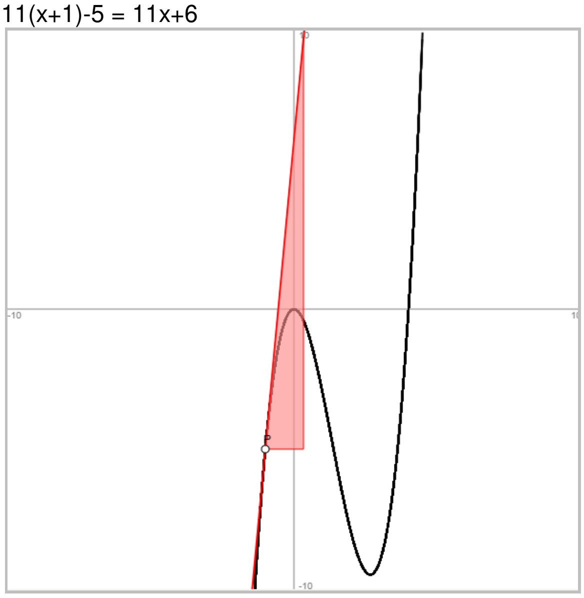
Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt (f'(x) = m), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Mit der Berechnung von f(x_0) und f'(x_0) (Funktionswert und Steigung an der Stelle x_0) ergibt sich als (Geraden-) Gleichung der Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0: t: y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).

Lösungen:

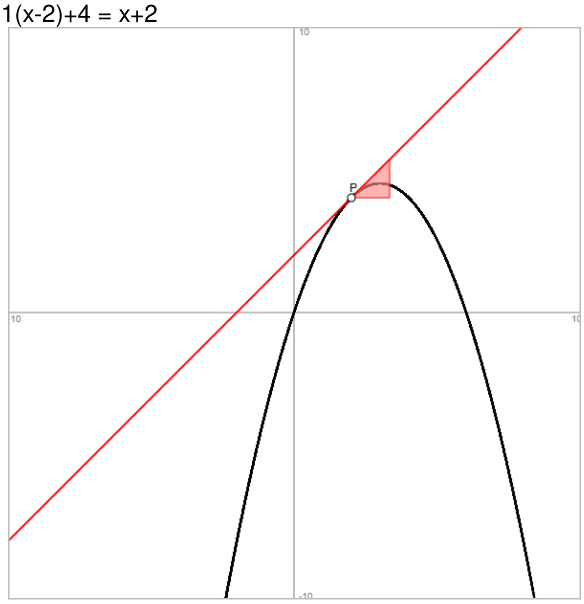
a) $f(1) = -0{,}75$, $f'(x) = 0{,}5x+2$ -> $f'(1) = 2{,}5$ ->
t: $y = 2{,}5(x-1)-0{,}75 = 2{,}5x-3{,}25$



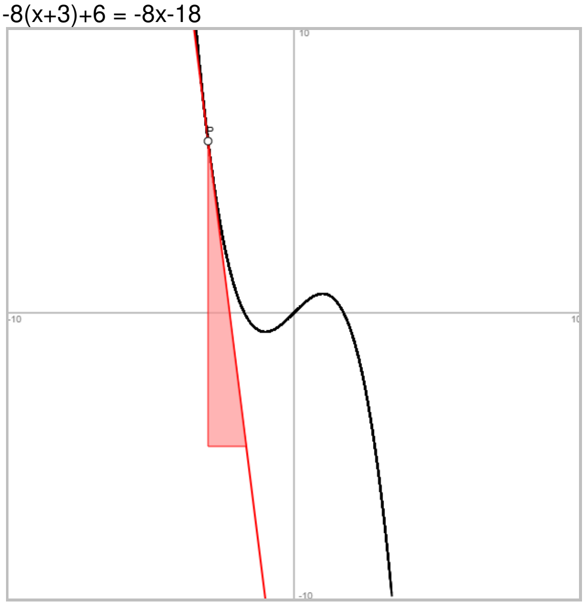
b) $f(-1) = -5$, $f'(x) = 3x^2-8x$ -> $f'(-1) = 11$ ->
t: $y = 11(x+1)-5 = 11x+6$



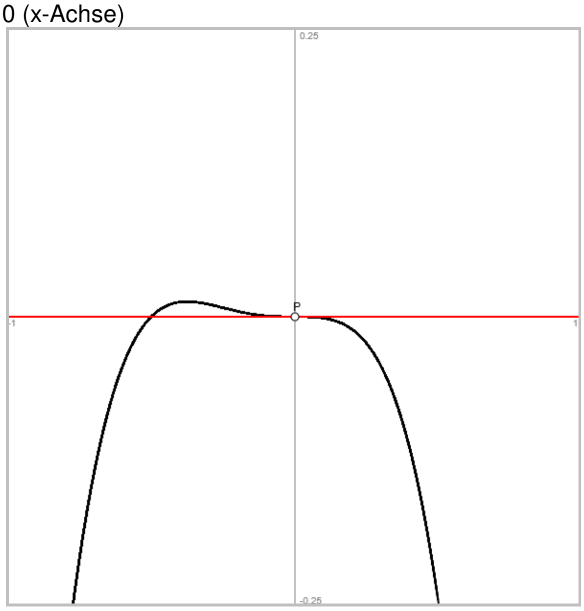
c) $f(2) = 4$, $f'(x) = -x+3$ -> $f'(2) = 1$ ->
t: $y = 1(x-2)+4 = x+2$



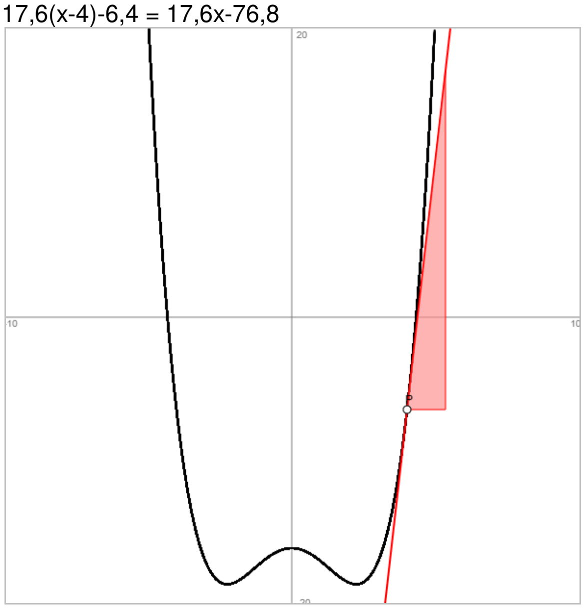
d) $f(-3) = 6$, $f'(x) = -x^2+1$ -> $f'(-3) = -8$ ->
t: $y = -8(x+3)+6 = -8x-18$



e) $f(0) = 0$, $f(x) = -x^3-2x^4$ -> $f'(x) = -3x^2-8x^3$ -> $f'(0) = 0$ ->
t: $y = 0$ (x-Achse)



f) $f(4) = -6{,}4$, $f'(x) = 2x^3/5-2x$ -> $f'(4) = 17{,}6$ ->
t: $y = 17{,}6(x-4)-6{,}4 = 17{,}6x-76{,}8$



Aufgabe 8: Berechne zur ganz rationalen Funktion f(x) an der Stelle x_0 die Gleichung der Normalen.

a) $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 4x - 7$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$, $x_0 = -2$

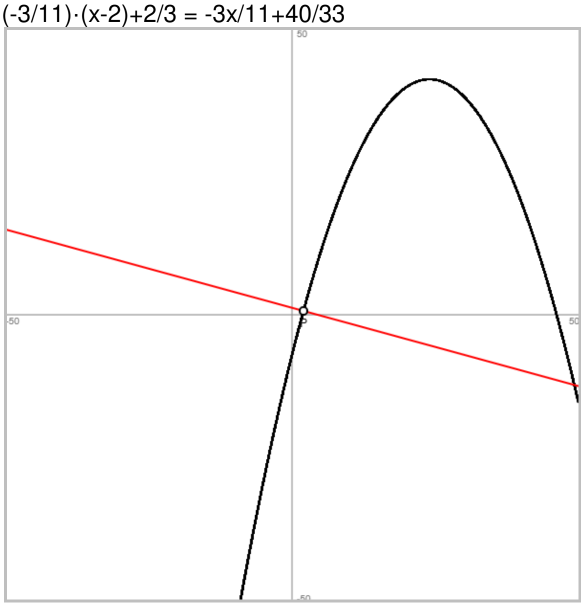
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = -\frac{x^2(4+2x^2)}{72}$, $x_0 = 4$

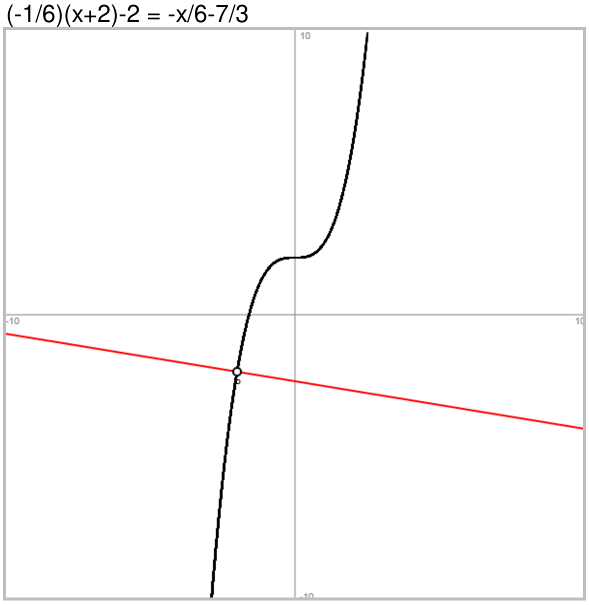
Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt (f'(x) = m), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Mit der Berechnung von $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ (Funktionswert und Steigung an der Stelle x_0) ergibt sich als (Geraden-) Gleichung der Normale senkrecht zur Funktion f(x) an der Stelle x_0: n: $y = (-1/f'(x_0))\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.

Lösungen:

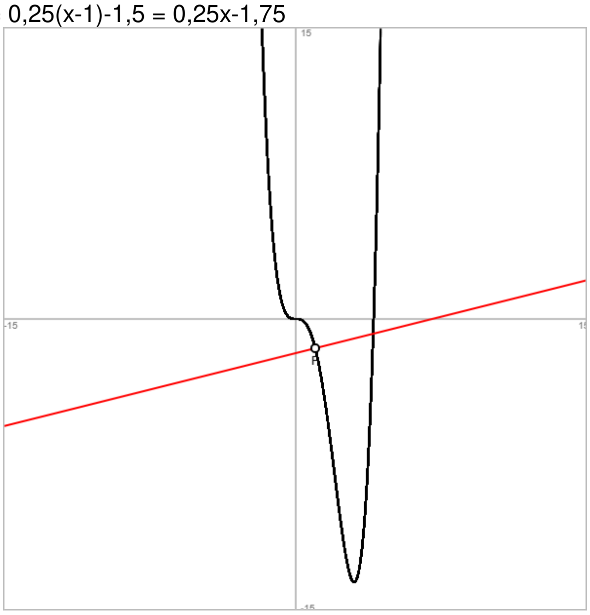
a) f(2) = 2/3, f'(x) = -x/6+4 -> f'(2) = 11/3 ->
t: y = (-3/11)·(x-2)+2/3 = -3x/11+40/33



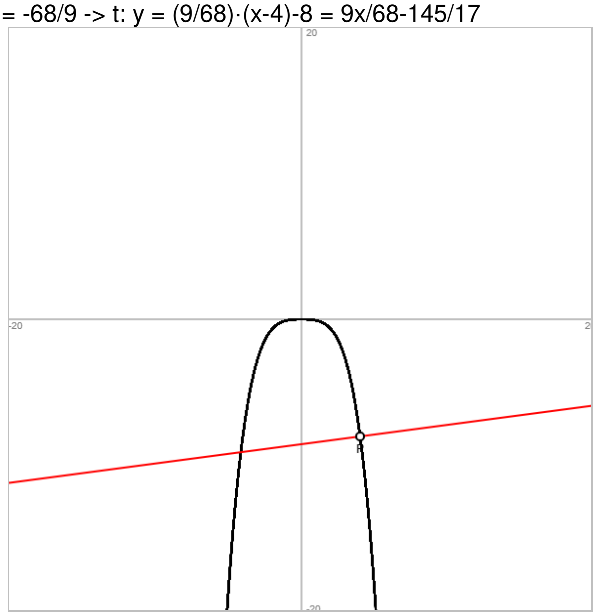
b) f(-2) = -2, f'(x) = $1{,}5x^2$ -> f'(-2) = 6 ->
t: y = (-1/6)(x+2)-2 = -x/6-7/3



c) f(1) = -1,5, f'(x) = $2x^3$-$6x^2$ -> f'(1) = -4 ->
t: y = 0,25(x-1)-1,5 = 0,25x-1,75



d) f(4) = -8, f(x) = -($2x^2$+x^4)/36, f'(x) = -(2x+$2x^3$)/18 ->
f'(4) = -68/9 -> t: y = (9/68)·(x-4)-8 = 9x/68-145/17



Aufgabe 9: Bilde die 1., 2., 3. Ableitung der ganz rationalen Funktion f(x).

a) $f(x) = 13x^2 - 12x - 3$

b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 5$

c) $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x - 13$

e) $f(x)=\frac{5}{12}x^4-\frac{5}{3}x^3$

f) $f(x)=\frac{2}{5}(x^2-4)(x^2+4)$

g) $f(x)=0{,}7x^3-0{,}2x^2+3{,}4x+7{,}8$

h) $f(x)=\frac{2}{7}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{4}x$

i) $f(x)=(5x-3)^2-x-1$

j) $f(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{10}x^5+5$

k) $f(x)=-\frac{x^2}{2}(4+x^2)^2$

l) $f(x)=\frac{3}{8}x^{10}+\frac{2}{7}x^7-x^5+\frac{4}{3}x^2-x$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die (1.) Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen, von da aus auf dieselbe Weise die 2. und 3. Ableitung.

Lösungen: a) $f'(x) = 26x-12$, $f''(x) = 26$, $f'''(x) = 0$; b) $f'(x) = 3x^2+8x+2$, $f''(x) = 6x+8$, $f'''(x) = 6$;
c) $f(x) = 4x^4+4x^2+1$, $f'(x) = 16x^3+8x$, $f''(x) = 48x^2+8$, $f'''(x) = 96x$; d) $f'(x) = x^2-2x+5$, $f''(x) = 2x-2$, $f'''(x) = 2$;
e) $f'(x) = 5x^3/3-5x^2$, $f''(x) = 5x^2-10x$, $f'''(x) = 10x-10$; f) $f(x) = 0{,}4(x^4-16)$, $f'(x) = 1{,}6x^3$, $f''(x) = 4{,}8x^2$, $f'''(x) = 9{,}6x$;
g) $f'(x) = 2{,}1x^2-0{,}4x+3{,}4$, $f''(x) = 4{,}2x-0{,}4$, $f'''(x) = 4{,}2$; h) $f'(x) = 6x^2/7+2x/3-5/4$, $f''(x) = 12x/7+2/3$, $f'''(x) = 12/7$;
i) $f(x) = 25x^2-31x+8$, $f'(x) = 50x-31$, $f''(x) = 50$, $f'''(x) = 0$; j) $f'(x) = 3x^5+0{,}5x^4$, $f''(x) = 15x^4+2x^3$, $f'''(x) = 60x^3+6x^2$;
k) $f(x) = -(16x^2+8x^4+x^6)/2$, $f'(x) = -(16x+16x^3+3x^5)$, $f''(x) = -(16+48x^2+15x^4)$, $f'''(x) = -(96x+60x^3)$;
l) $f'(x) = 15x^9/4+2x^6-5x^4+8x/3-1$, $f''(x) = 135x^8/4+12x^5-20x^3+8/3$, $f'''(x) = 270x^7+60x^4-60x^2$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2024 / Mathematik-Aufgabenpool: Ableitungen I / Aufgabe 1977-1985