Michael Buhlmann

Mathematatik-Aufgabenpool

> Analysis

> Ableitungen III

Einleitung: Exponentialfunktionen (zur Basis e; e als Eulersche Zahl) f: **R** -> **R** besitzen den Funktionsterm und die Ableitung:

$$f(x) = e^{ax} \;\Rightarrow\; f'(x) = ae^{ax},$$

für trigonometrische Sinus- und Kosinusfunktionen gilt:

$$f(x) = \sin(ax) \;\Rightarrow\; f'(x) = a\cos(ax)$$
$$f(x) = \cos(ax) \;\Rightarrow\; f'(x) = -a\sin(ax)$$

(a reell). Insgesamt gelten die Ableitungsregeln:

(f(x) + c)' = f'(x) (additive Konstante)
[c·f(x)]' = c·f'(x) (konstanter Faktor)
(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) (Summenregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/reelle n)
$(e^{ax})' = ae^{ax}$, $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$
(sin(ax))' = acos(ax), (sin(ax+b))' = acos(ax+b)
(cos(ax))' = -asin(ax), (cos(ax+b))' = -asin(ax+b))
f''(x) = (f'(x))' (2. Ableitung)
f'''(x) = (f''(x))' (3. Ableitung)

(a, b. c reell). Die Ableitungen können mathematisch unter verschiedenen Fragestellungen betrachtet werden: Ableitung/Steigung an einer bestimmten Stelle x_0, in einem bestimmten Punkt $P(x_0|f(x_0))$; Ermittlung von Stellen bzw. Funktionspunkten mit bestimmter Steigung, waagerechte Tangenten; Bestimmung von Tangenten und Normalen; höhere Ableitungen.

Aufgabe 1: Bilde die 1. Ableitung der Exponential- oder trigonometrischen Funktion f(x).

a) $f(x) = 2e^x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}e^{4x}$

c) $f(x) = -5\sin(x)$

d) $f(x) = \cos(x) - 1$

e) $f(x) = \sin(3x) + 2$

f) $f(x) = -4\cdot\cos(\frac{1}{2}x)$

g) $f(x) = \frac{2}{3}\cos(3x) - \frac{5}{2}\sin(2x)$

h) $f(x) = e^{3x} - e^{-5x}$

i) $f(x) = \frac{1}{4}e^{-0,5x} + e^2$

j) $f(x) = -\frac{4}{5}\sin(-3x) + \pi$

k) $f(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \sin(x) + 11$

l) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) - 9$

m) $f(x) = 5e^{-x} + 3e^x + 1$

n) $f(x) = 2\sin(\pi x) - 3\cos(\frac{\pi}{2}x)$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen.

Lösungen: a) $f'(x) = 2e^x$; b) $f'(x) = 2e^{4x}$; c) f'(x) = -5cos(x); d) f'(x) = -sin(x); e) f'(x) = 3cos(3x); f) f'(x) = 2sin(0,5x); g) f'(x) = -2sin(3x)-5cos(2x); h) $f'(x) = 3e^{3x}+5e^{-5x}$; i) $f'(x) = e^{-0,5x}/8$; j) f'(x) = 12cos(-3x)/5; k) $f'(x) = -e^{-3x}+\cos(x)$; l) f'(x) = -sin(2x)+sin(x); m) $f'(x) = -5e^{-x}+3e^x$; n) f'(x) = 2πcos(πx)+1,5πsin(πx/2).

Aufgabe 2: Berechne die Steigung der Funktion f(x) an der Stelle x_0.

a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = -\sin(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = 2\cos(x)$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = e^{2x} + \sin(2x) - 2$, $x_0 = 0$

e) $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(\pi x) - 2$, $x_0 = 3$

f) $f(x) = -3\sin(\frac{\pi}{2}x) + 2$, $x_0 = 1$

g) $f(x) = 3e^{0{,}5x} - 1$, $x_0 = 2\ln(5)$

h) $f(x) = -\frac{1}{3}e^{-6x} + 3e$, $x_0 = -1$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. In den Term der Ableitung wird für x der Wert von x_0 eingesetzt und die Steigung berechnet.

Lösungen: a) $f'(x) = e^x \to f'(0) = 1$; b) $f'(x) = -\cos(x) \to f'(\pi/2) = 0$; c) $f'(x) = -2\sin(x) \to f'(-\pi/2) = 2$; d) $f'(x) = 2e^{2x} + 2\cos(2x) \to f'(0) = 4$; e) $f'(x) = 1{,}5\pi\cos(\pi x) \to f'(3) = -1.5\pi$; f) $f'(x) = -1{,}5\pi\cos(\pi x/2) \to f'(1) = 0$; g) $f'(x) = 1{,}5e^{0{,}5x} \to f'(2\ln(5)) = 15$; h) $f'(x) = 2e^{-6x} \to f'(-1) = 2e^6$.

Aufgabe 3: Bilde die 1. Ableitung der Funktion f(x).

a) $f(x) = e^x + x^2 - 3$

b) $f(x) = -\cos(x) + x$

c) $f(x) = 3e^{5x-2}$

d) $f(x) = 2\sin(x+3) - 1$

e) $f(x) = \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{2}{5}e^{5x} + \frac{1}{3}x^3 + 1$

f) $f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}e^{-2x}$

g) $f(x) = 5\cos(3x-2) + 4$

h) $f(x) = e^{-2x+1} + \cos(2x-1) + \sin(2x+1)$

i) $f(x) = \frac{2}{3}e^{-3x} + ex^2 - e^2x$

j) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(5x) - 2x - 3$

k) $f(x) = -e^{-x} + \pi\sin(2x) + x$

l) $f(x) = \frac{1}{5}e^{2x-5} - x^4 + 2x^2$

m) $f(x) = \frac{2e^{-2x} + 3e^{3x}}{5}$

n) $f(x) = 0{,}4 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + \pi x^2$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen.

Lösungen: a) $f'(x) = e^x + 2x$; b) $f'(x) = \sin(x)+1$; c) $f'(x) = 15e^{5x-2}$; d) $f'(x) = 2\cos(x+3)$; e) $f'(x) = 1{,}5e^{2x}-2e^{5x}+x^2$; f) $f'(x) = 10x^3/3+1{,}5e^{-2x}$; g) $f'(x) = -15\sin(3x-2)$; h) $f'(x) = -2e^{-2x+1}-2\sin(2x-1)+2\cos(2x+1)$; i) $f'(x) = -2e^{-3x}+2ex-e^2$; j) $f'(x) = -2{,}5\cos(5x)-2$; k) $f'(x) = e^{-x}+2\pi\cos(2x)+1$; l) $f'(x) = 0{,}4e^{2x-5}-4x^3+4x$; m) $f(x) = 0{,}4e^{-2x}+0{,}6e^{3x} \to f'(x) = -0{,}8e^{-2x}+1{,}8e^{3x}$, n) $f'(x) = 0{,}2\pi\cos(\pi x/2)+2\pi x$.

Aufgabe 4: Berechne die Steigung der Funktion f(x) im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

a) $f(x) = 5e^{2x} - 3$, P(0|2)

b) $f(x) = -3\cos(\pi x) + 2$, P(0,5|f(0,5))

c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}x) - e^x$, P(0|-1)

d) $f(x) = 3e^{-2x+4} + \frac{5}{3}x^3 + x$, P(2|f(2))

e) $f(x) = x(x-5) - e^x$, P(0|0)

f) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + 4) + 2x + 3$, P(-8|f(-8))

g) $f(x) = e^{3x} - 3x + 3e$, P(-2|f(-2))

h) $f(x) = -\frac{5}{4}e^{4x} + \cos(2x) + x$, P(0|$-\frac{1}{4}$)

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. In den Term der Ableitung wird für x der Wert von x_0 eingesetzt und die Steigung berechnet.

Lösungen: a) $f'(x) = 10e^{2x} \to f'(0) = 10$; b) $f'(x) = 3\pi\sin(\pi x) \to f'(0{,}5) = 3\pi$; c) $f'(x) = \pi\cos(\pi x/4)/4-e^x \to f'(0) = \pi/4-1$; d) $f'(x) = -6e^{-2x+4}+5x^2+1 \to f'(2) = 15$; e) $f(x) = x^2-5x-2e^x \to f'(x) = 2x-5-2e^x \to f'(0) = -7$; f) $f'(x) = 0{,}5\cos(0{,}5x+4)+2 \to f'(-8) = 2{,}5$; g) $f'(x) = 3e^{3x}-3 \to f'(-2) = 3e^{-6}-3$; h) $f'(x) = -5e^{4x}-2\sin(2x)+1 \to f'(0) = -4$.

Aufgabe 5: Bestimme die Stellen x_0, an denen die Exponentialfunktion f(x) die Steigung m besitzt.

a) $f(x) = 4e^{1,5x} - 4$, m = 6
b) $f(x) = 5e^{-x} + 3x - 7$, m = -2
c) $f(x) = -0,5e^{-2x} + x$, m = 4
d) $f(x) = e^{0,5x} + 2e^{-0,5x}$, m = 0
e) $f(x) = \frac{3}{4}e^{1-2x} - 4x + 5$, m = -5,5
f) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 7e^{x} + 13x$, m = 3

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt (f'(x) = m), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt.

Lösungen: a) $f'(x) = 6e^{1,5x} = 6 \Leftrightarrow e^{1,5x} = 1 \Leftrightarrow 1,5x=0 \Leftrightarrow x=0$; b) $f'(x) = -5e^{-x} + 3 = -2 \Leftrightarrow -5e^{-x} = -5 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$; c) $f'(x) = e^{-2x}+1 = 4 \Leftrightarrow e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ln(3) \Leftrightarrow x = -0,5\ln(3)$; d) $f'(x) = 0,5e^{0,5x}-e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow 0,5e^{0,5x} = e^{-0,5x} \Leftrightarrow 0,5e^{x} = 1 \Leftrightarrow e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$; e) $f'(x) = -1,5e^{1-2x}-4 = -5,5 \Leftrightarrow -1,5e^{1-2x} = -1,5 \Leftrightarrow e^{1-2x} = 1 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = 0,5$; f) $f'(x) = e^{2x}-7e^{x} +13 = 3 \Leftrightarrow e^{2x}-7e^{x} +10 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 2, e^{x} = 5 \Leftrightarrow x = \ln(2), x = \ln(5)$.

Aufgabe 6: Bestimme die Stellen $x_0 \varepsilon [0; 2\pi]$, an denen die trigonometrische Funktion f(x) die Steigung m besitzt.

a) $f(x) = -2\sin(x)$, m = 2
b) $f(x) = \cos(2x)$, m = -2
c) $f(x) = 4\cos(x) - 5x$, m = -1
d) $f(x) = -3\sin(\pi x) + 4,5$, m = 0
e) $f(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + 3$, m = 1
f) $f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{1}{2}x) + \frac{x}{4} + 2$, m = -0,5

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt (f'(x) = m), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt.

Lösungen: a) $f'(x) = -2\mathrm{cox}(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x=\pi$; b) $f'(x) = -2\sin(2x) = -2 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = \pi/2, 2x = 5\pi/2 \Leftrightarrow x = \pi/4, x = 5\pi/4$; c) $f'(x) = -4\sin(x)-5 = -1 \Leftrightarrow -4\sin(x) = 4 \Leftrightarrow \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = 3\pi/2$; d) $f'(x) = -3\pi\cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = \pi/2, \pi x = 3\pi/2, \pi x = 5\pi/2, \pi x = 7\pi/2, \pi x = 9\pi/2, \pi x = 11\pi/2 \Leftrightarrow x = 0,5, x = 1,5, x = 2,5, x = 3,5, x = 4,5, x = 5,5$; e) $f'(x) = 0,5\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x) = 2$ -> keine Lösung; f) $f'(x) = -0,75\sin(0,5x)+0,25 = -0,5 \Leftrightarrow -0,75\sin(0,5x) = -0,75 \Leftrightarrow \sin(0,5x) = -1 \Leftrightarrow 0,5x = 3\pi/2 \Leftrightarrow x = 3\pi$ -> keine Lösung.

Aufgabe 7: Bestimme die Punkte $P(x_0|f(x_0))$, in denen die Exponentialfunktion f(x) waagerechte Tangenten besitzt.

a) $f(x) = e^{2x} - 4x + 1$
b) $f(x) = -2e^{2x} + 6e^{x}$
c) $f(x) = 2e^{x} + e^{-2x} + 4$
d) $f(x) = 2e^{0,5x+3} - x + 3$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung (hier 0) gesetzt (f'(x) = 0), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Der Wert x wird dann in die Funktion f(x) eingesetzt und der Funktionspunkt P auf diese Weise ermittelt.

Lösungen: a) $f'(x) = 2e^{2x}-4 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(2)/2 = \ln(\sqrt{2})$ -> $f(\ln(2)/2) = 3-4\ln(2)$ -> $P(\ln(2)/2|3-4\ln(2))$; b) $f'(x) = -4e^{2x}+6e^{x} = 0 \Leftrightarrow -4e^{x}+6 = 0 \Leftrightarrow 6 = 4e^{x} \Leftrightarrow e^{x} =1,5 \Leftrightarrow x = \ln(1,5)$ -> $f(\ln(1,5)) = 4,5$ -> $P(\ln(1,5)|4,5)$; c) $f'(x) = 2e^{x}-2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{3x}-2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{3x} = 2 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ -> $f(0) = 7$ -> $P(0|7)$; d) $f'(x) = e^{0,5x+3}-1 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x+3} = 1 \Leftrightarrow 0,5x+3 = 0 \Leftrightarrow 0,5x = -3 \Leftrightarrow x = -6$ -> $f(-6) = 11$ -> $P(-6|11)$.

Aufgabe 8: Bestimme mit $x_0 \varepsilon [0; 2\pi]$ die Punkte $P(x_0|f(x_0))$, in denen die trigonometrische Funktion f(x) waagerechte Tangenten besitzt.

a) $f(x) = 3\sin(x) - 4$
b) $f(x) = x + \cos(x)$
c) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x) + 1$
d) $f(x) = -\frac{1}{4}\sin(2x) + 6x - 8$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung (hier 0) gesetzt (f'(x) = 0), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Der Wert x wird dann in die Funktion f(x) eingesetzt und der Funktionspunkt P auf diese Weise ermittelt.

Lösungen: a) $f'(x) = 3\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$ -> $f(\pi/2) = -1, f(3\pi/2) = -7$ -> $P_1(\pi/2|-1), P_2(3\pi/2|-7)$;

b) f'(x) = 1-sin(x) = 0 ⇔ 1 = sin(x) ⇔ x = π/2 -> f(π/2) = π/2 -> P(π/2| π/2); c) f'(x) = -πsin(πx/3)/3 = 0 ⇔ sin(πx/3) = 0 ⇔ πx/3 = 0, πx/3 = π, πx/3 = 2π ⇔ x = 0, x = 3, x = 6 -> f(0) = 2, f(3) = 0, f(6) = 2 -> $P_1(0|2)$, $P_2(3|0)$, $P_3(6|2)$;
d) f'(x) = -0,5cos(2x)+6 = 0 ⇔ 6 = 0,5cos(2x) ⇔ 12 = cos(2x) -> keine Lösung.

Aufgabe 9: Berechne zur Funktion f(x) an der Stelle x_0 die Gleichung der Tangente.

a) $f(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - 3$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x) - 1$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{4}x$, $x_0 = \pi$

d) $f(x) = -\frac{1}{10}e^{-3x} + x^2$, $x_0 = 0$

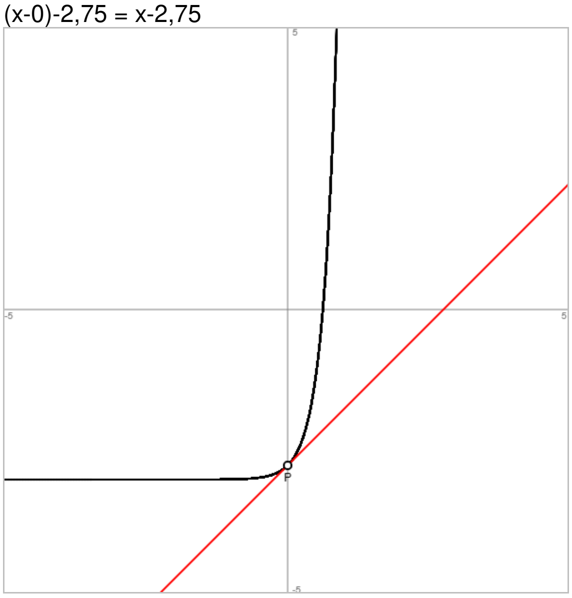
e) $f(x) = e^{2x-4} - e^{x-2}$, $x_0 = 2$

f) $f(x) = 2\sin(\pi x) - 3\cos(\pi x)$, $x_0 = -1$

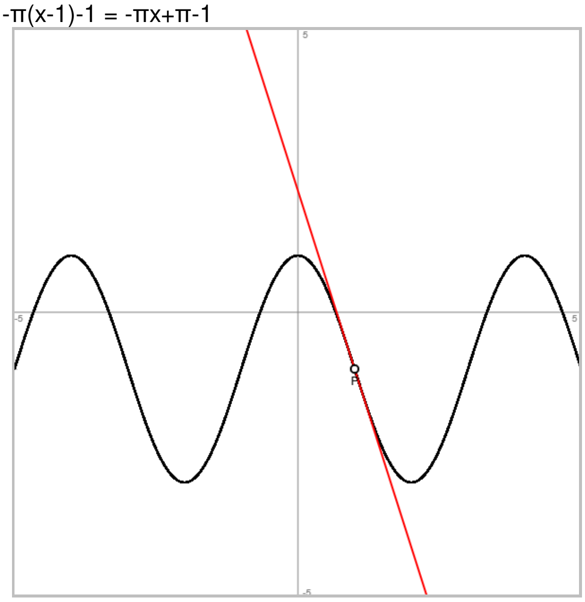
Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt (f'(x) = m), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Mit der Berechnung von $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ (Funktionswert und Steigung an der Stelle x_0) ergibt sich als (Geraden-) Gleichung der Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0: t: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Lösungen:

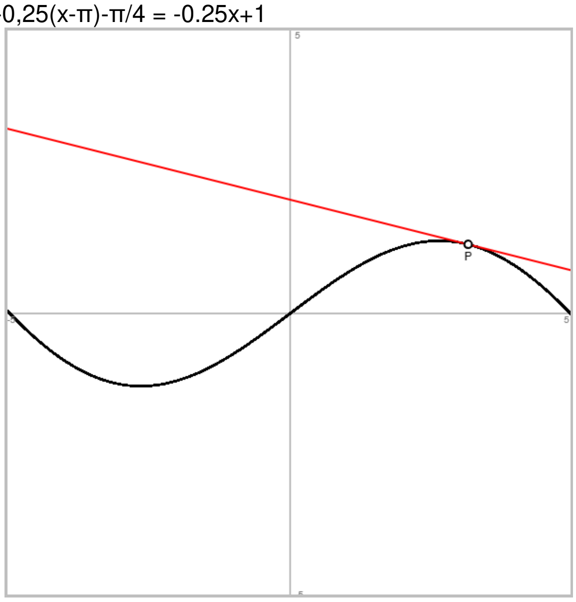
a) f(0) = -2,75, f'(x) = e^{4x} -> f'(0) = 1 ->
t: y = 1(x-0)-2,75 = x-2,75



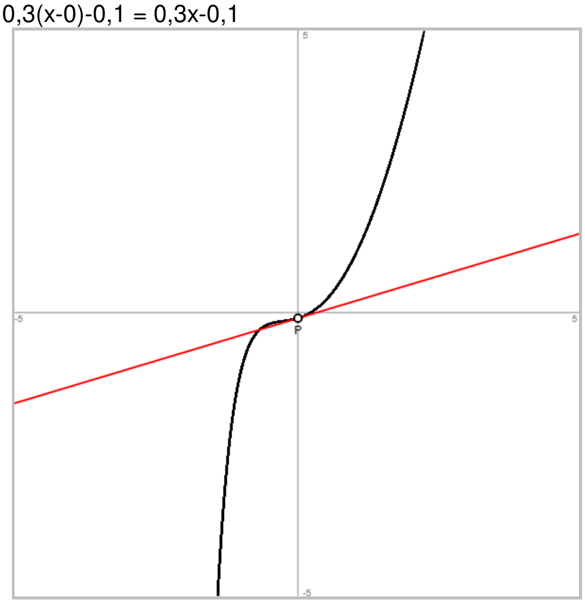
b) f(1) = -1, f'(x) = -πsin(πx/2) -> f'(1) = -π ->
t: y = -π(x-1)-1 = -πx+π-1



c) f(π) = -π/4, f'(x) = 0,5cos(0,5x)-0,25 -> f'(π) = -0.25 ->
t: y = -0,25(x-π)-π/4 = -0.25x+1

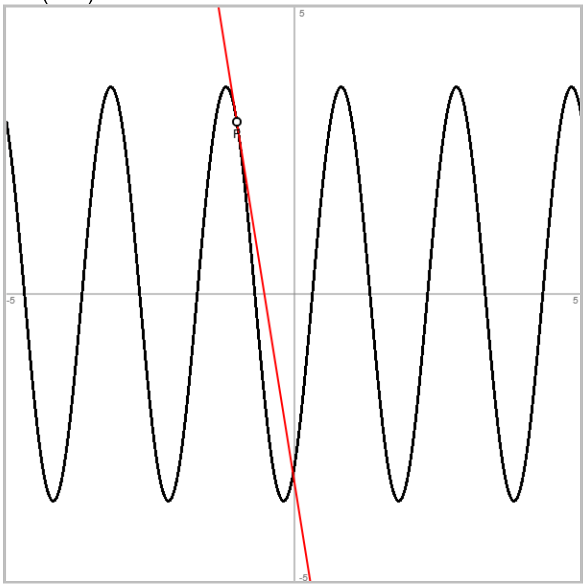


d) f(0) = -0,1, f'(x) = $0,3e^{-3x}$+2x -> f'(0) = 0,3 ->
t: y = 0,3(x-0)-0,1 = 0,3x-0,1



e) $f(2) = 0$, $f'(x) = 2e^{2x-4}-e^{x-2}$ -> $f'(2) = 1$ ->
t: $y = 1(x-2)+0 = x-2$

f) $f(-1) = 3$, $f'(x) = 2\pi\cos(\pi x)+3\pi\sin(\pi x)$ -> $f'(-1) = -2\pi$ ->
t: $y = -2\pi(x+1)+3 = -2\pi x-2\pi+3$



Aufgabe 10: Berechne zur ganz rationalen Funktion f(x) an der Stelle x_0 die Gleichung der Normalen.

a) $f(x) = e^x - x - 2$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sin(x) - x^2$, $x_0 = 0$

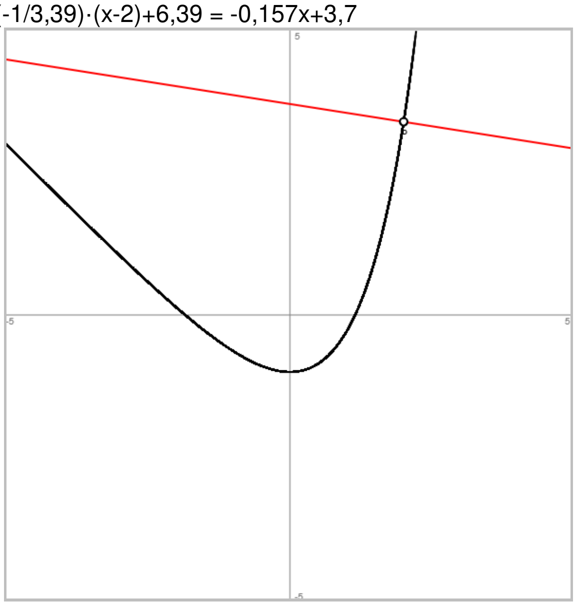
c) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 0{,}3$, $x_0 = 0$

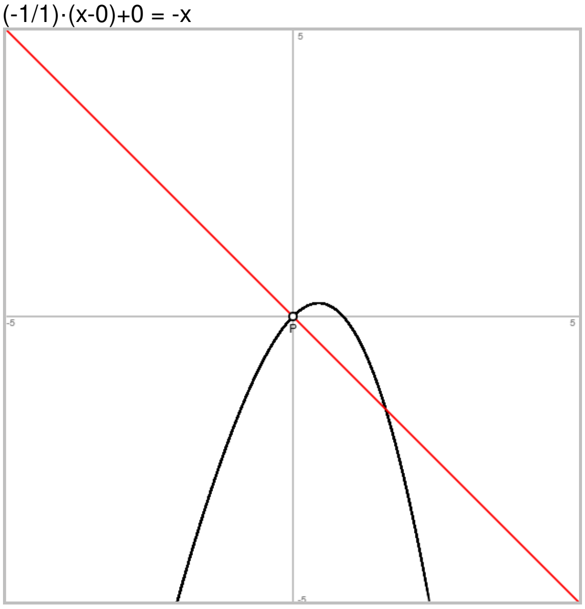
Vorgehensweise: Es ist jeweils die Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen. Der Term der Ableitung wird gleich der vorgegebenen Steigung gesetzt ($f'(x) = m$), die entstandene Gleichung nach x (= x_0) umgeformt. Mit der Berechnung von $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ (Funktionswert und Steigung an der Stelle x_0) ergibt sich als (Geraden-) Gleichung der Normale senkrecht zur Funktion f(x) an der Stelle x_0: n: $y = (-1/f'(x_0))\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.

Lösungen:

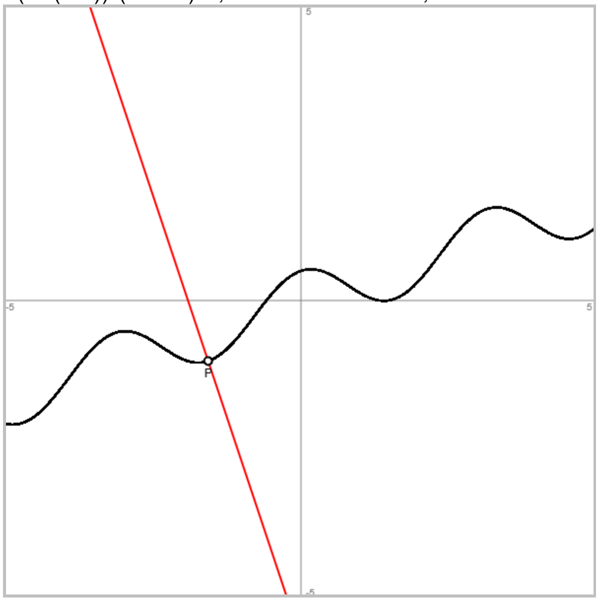
a) $f(2) = 3{,}39$, $f'(x) = e^x-1$ -> $f'(2) = 6{,}39$ ->
t: $y = (-1/3{,}39)\cdot(x-2)+6{,}39 = -0{,}157x+3{,}7$



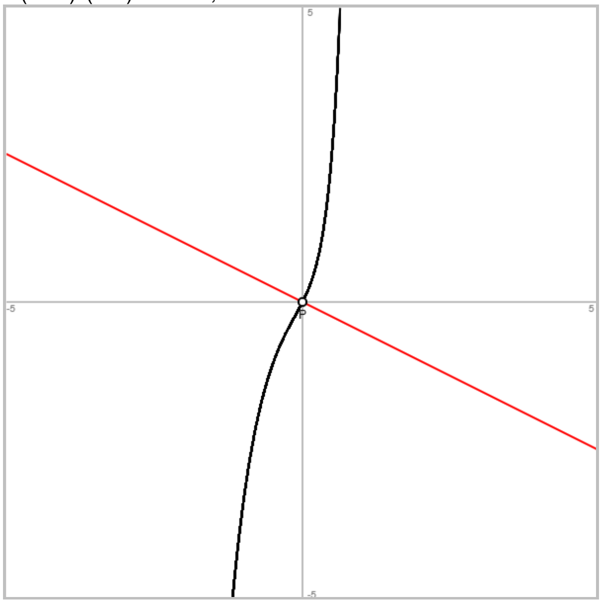
b) $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos(x)-2x$ -> $f'(0) = 1$ ->
t: $y = (-1/1)\cdot(x-0)+0 = -x$



c) $f(-\pi/2) = -0{,}5-\pi/6$, $f'(x) = -\sin(2x)+1/3$ -> $f'(-\pi/2) = 1/3$ ->
t: $y = (-1/(1/3))\cdot(x+\pi/2)-0{,}5-\pi/6 = -3x-5\pi/3-0{,}5$



d) $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{5x}+e^{-2x}$ -> $f'(0) = 2$ ->
t: $y = (-1/2)\cdot(x-0)+0 = -0{,}5x$



Aufgabe 11: Bilde die 1., 2., 3. Ableitung der Funktion f(x).

a) $f(x) = e^{2x} - x^3$

b) $f(x) = 2e^{x} + e^{-2x}$

c) $f(x) = 27e^{\frac{1}{3}x} - 3\sin(x)$

d) $f(x) = 5\cos(2x) + 3x^2$

e) $f(x) = \sin(\pi x) - 2\pi^2$

f) $f(x) = \frac{5}{8}\cos(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x)$

g) $f(x) = 3e^{-5x} + 5e^{3x} + x^5 - 4x^2 + x - 7$

h) $f(x) = \frac{2}{3}e^{3x+4} - \frac{1}{2}e^{-2x-1} - \frac{e}{4}$

i) $f(x) = -\sin(5x-1) - \cos(2-3x)$

j) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + x^3 - 2\sin(-x)$

k) $f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{4}x)}{3} - \frac{e^{-2x}}{4} + \pi - e$

l) $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - x - \frac{3}{2}e^{2,5(x-3)}$

Vorgehensweise: Es ist jeweils die (1.) Ableitung nach den Ableitungsregeln zu berechnen, von da aus auf dieselbe Weise die 2. und 3. Ableitung.

Lösungen: a) $f'(x) = 2e^{2x}-3x^2$, $f''(x) = 4e^{2x}-6x$, $f'''(x) = 8e^{2x}-6$;
b) $f'(x) = 2e^{x}-2e^{-2x}$, $f''(x) = 2e^{x}+4e^{-2x}$, $f'''(x) = 2e^{x}-8e^{-2x}$;
c) $f'(x) = 9e^{x/3}-3\cos(x)$, $f''(x) = 3e^{x/3}+3\sin(x)$, $f'''(x) = e^{x/3}+3\cos(x)$;
d) $f'(x) = -10\sin(2x)+6x$, $f''(x) = -20\cos(2x)+6$, $f'''(x) = 40\sin(2x)$;
e) $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$, $f''(x) = -\pi^2\sin(\pi x)$, $f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x)$;
f) $f'(x) = -5\sin(2x)/4+3\cos(4x)/16$, $f''(x) = -5\cos(2x)/2-3\sin(4x)/4$, $f'''(x) = 5\sin(2x)-3\cos(4x)$;
g) $f'(x) = -15e^{-5x}+15e^{3x}+5x^4-8x+1{,}4$, $f''(x) = 75e^{-5x}+45e^{3x}+20x^3-8$, $f'''(x) = -375e^{-5x}+135e^{3x}+60x^2$;
h) $f'(x) = 2e^{3x+4}+e^{-2x+1}$, $f''(x) = 6e^{3x+4}-2e^{-2x+1}$, $f'''(x) = 18e^{3x+4}+4e^{-2x+1}$;
i) $f'(x) = -5\cos(5x-1)-3\sin(2-3x)$, $f''(x) = 25\sin(5x-1)+9\sin(2-3x)$, $f'''(x) = 125\cos(5x-1)-27\cos(2-3x)$;
j) $f(x) = 0{,}5e^{-4x}+x^3+2\sin(x)$ -> $f'(x) = -2e^{-4x}+3x^2+2\cos(x)$, $f''(x) = 8e^{-4x}+6x-2\sin(x)$, $f'''(x) = -32e^{-4x}+6-2\cos(x)$;
k) $f(x) = \cos(\pi x/4)/3-e^{-2x}/4+\pi-e$ -> $f'(x) = -\pi\sin(\pi x/4)/12+e^{-2x}/2$, $f''(x) = -\pi^2\cos(\pi x/4)/48-e^{-2x}$, $f'''(x) = \pi^3\sin(\pi x/4)/192+2e^{-2x}$;
l) $f'(x) = 8x/5-1-15e^{2,5(x-3)}/4$, $f''(x) = 8/5-75\,e^{2,5(x-3)}/8$, $f'''(x) = -375\,e^{2,5(x-3)}/16$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2024 / Mathematik-Aufgabenpool: Ableitungen III / Aufgabe 1989-1999