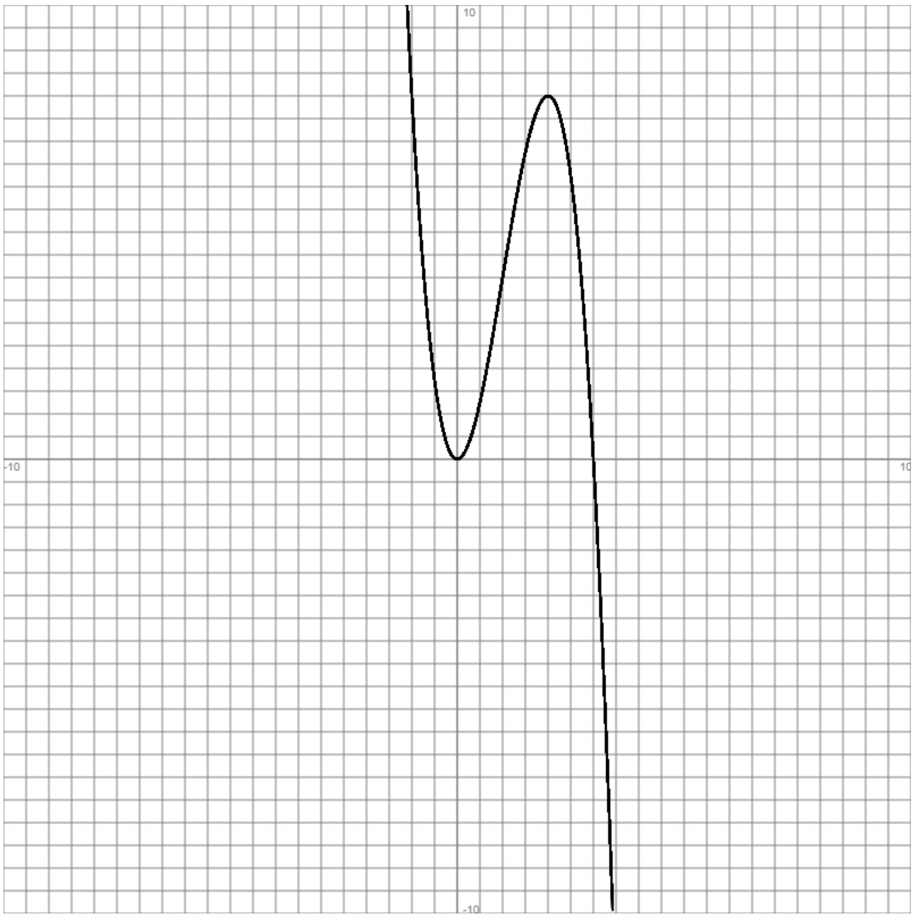
Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Aufgaben zur Analysis I

Einleitung: Die (mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten.

Aufgabe 1 (mit Hilfsmitteln): Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades f(x) ist nachstehend eingezeichnet:



a) Gib die Nullstellen, den Hoch- und den Tiefpunkt der Funktion f(x) an.

b) Entscheide und begründe, welcher der nachstehenden Funktionsterme zur abgebildeten Funktion f(x) gehört:

(1) $f(x) = x^2(x-3)$ / (2) $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-3)^2$ / (3) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ / (4) $f(x) = -2x^2(x-3)$.

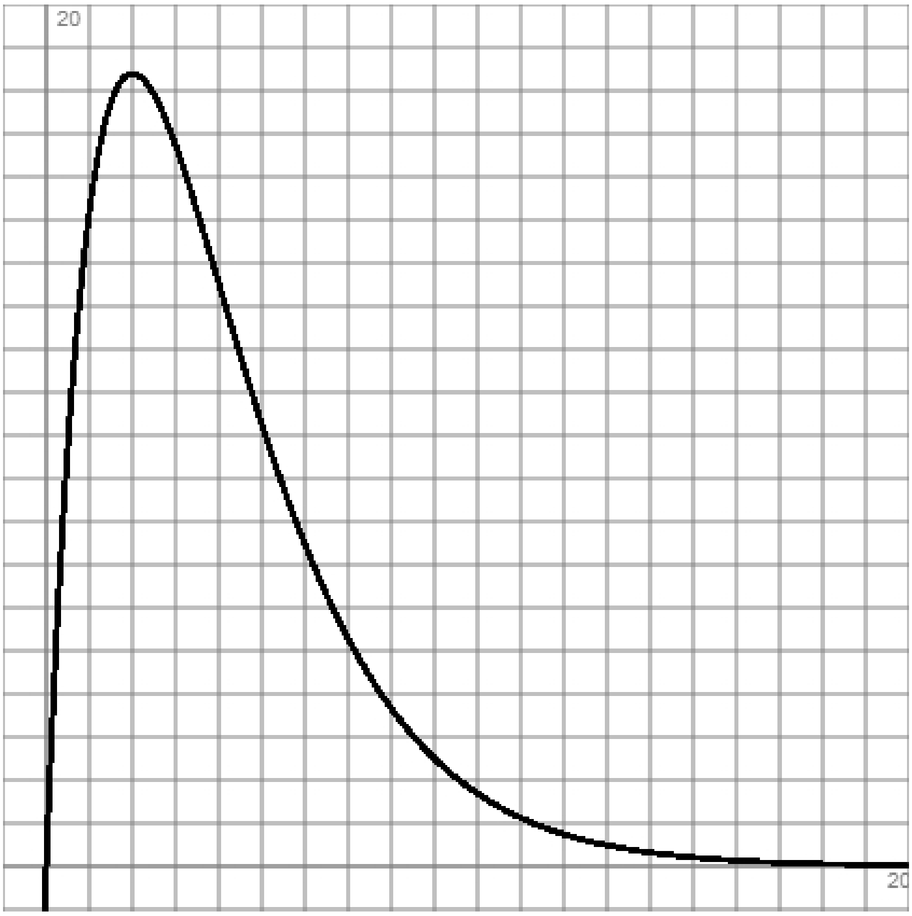
c) Es ist: $f(x) = 6x^2 - 2x^3$. Zeige, dass der Graph der Funktion f(x) an der Stelle x = 1 einen Wendepunkt besitzt. Berechne die Wendetangente.

d) Skizziere eine durch den Koordinatenursprung verlaufende Stammfunktion F(x) der Funktion f(x). Erläutere die Vorgehensweise.

e) Berechne den Inhalt der zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

f) Es ist: $h(x) = -3\cdot f(x+2)$. Wie lauten Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkt der Funktion h(x)?

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): Der nachstehend abgebildete Graph einer Funktion f(t) beschreibt einer der seltenen Niederschlagsereignisse in der Wüste Namib (südwestliches Afrika) im Oktober 2018 (t: Tag, f(t): Niederschlagsmenge in mm pro Tag).



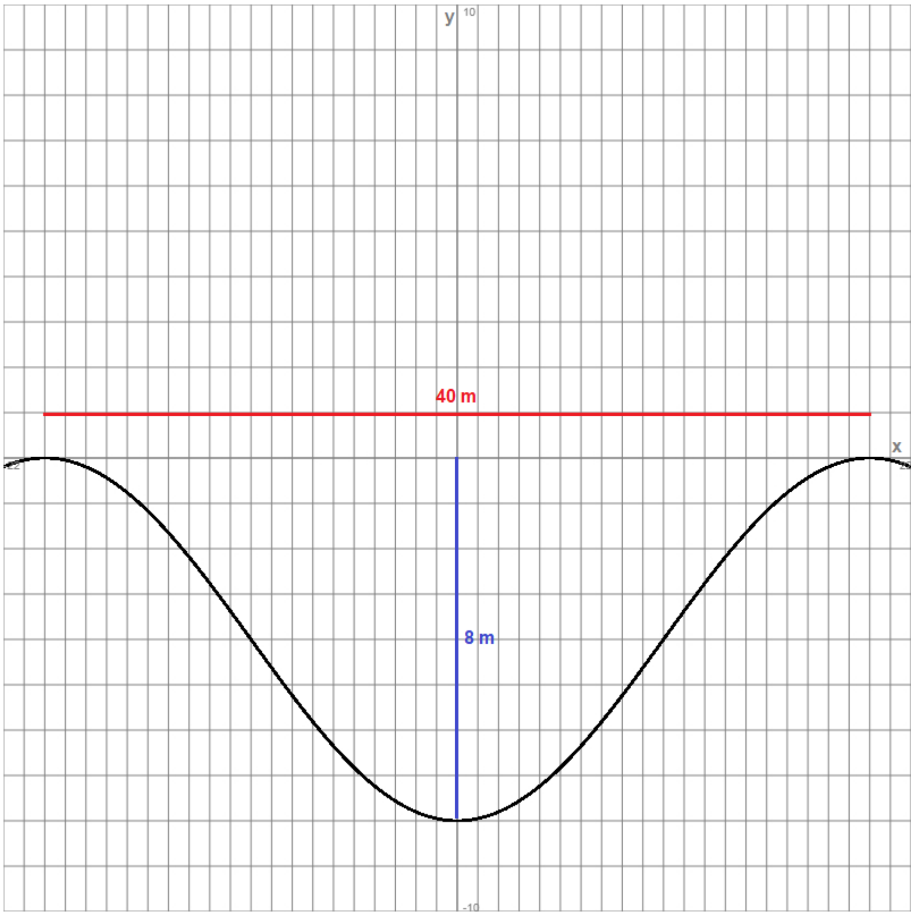
a) Bestimme Tag und maximale Regenmenge pro Tag. Um wie viel ist die Niederschlagsmenge pro Tag zwischen dem Beginn und dem Höhepunkt des Niederschlagsereignisses durchschnittlich gestiegen? Wann und um wie viel geht die Regenmenge pro Tag am stärksten zurück?

b) Ermittle die Niederschlagsmenge (in mm), die in der ersten Woche nach Einsetzen des Regens einen Quadratmeter der Wüste Namib bewässert.

c) Die oben abgebildete Funktion besitzt die Funktionsgleichung: f(t) = $25te^{-05t}$. Zeige, dass die Funktion f(t) für t > 2 immer monoton fallend ist.

d) Zeige, dass die Funktion F(t) = $-(50t+100)e^{-05t}$ eine Stammfunktion von f(t) ist. Bestimme eine integralfreie Darstellung für die Niederschlagsmenge. Mit welcher Niederschlagsmenge ist (theoretisch) auf Dauer bei dem Niederschlagsereignis zu rechnen? Welchen Anteil macht diese Niederschlagsmenge aus an der gesamten Regenmenge, die für die Wüste Namib bei 250 mm im Jahr liegt?

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): a) Der Querschnitt eines Kanals soll modelliert werden mit Hilfe einer Kosinusfunktion des Typs $f(x) = a\cdot\cos(bx) + c$. Die Kanalbreite beträgt 40 m, die maximale Kanaltiefe 8 m.



Bestimme die Kosinusfunktion.

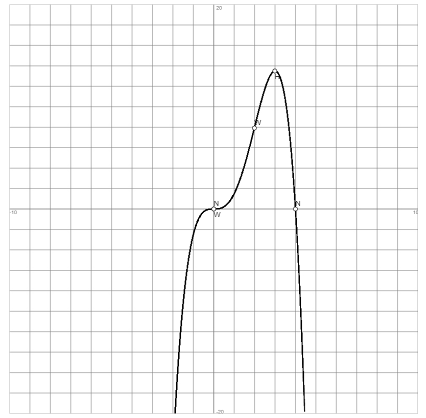
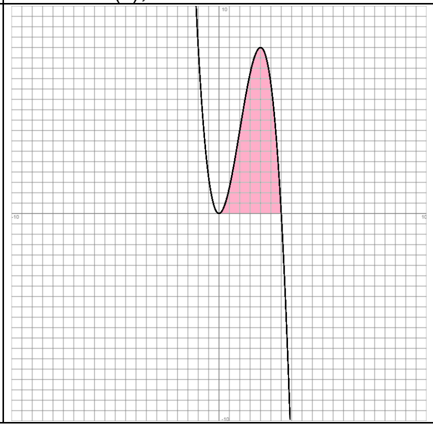
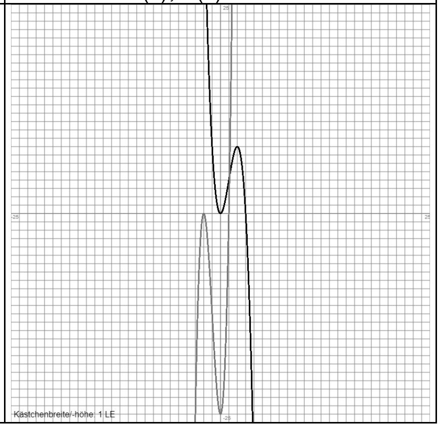
b) Wo ist die Kanalböschung am steilsten? Wie groß ist der maximale Böschungswinkel?

c) Berechne die Querschnittfläche des Kanals.

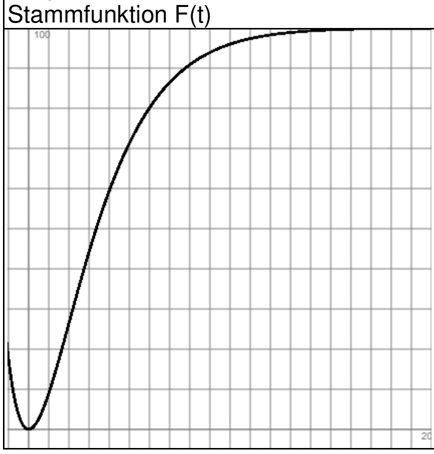
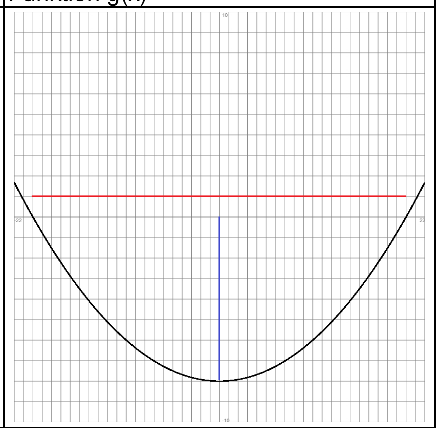
d) Der Kanal ist 6 m hoch mit Wasser gefüllt. Berechne die Breite, die die Wasseroberfläche im Kanal einnimmt.

e) Eine weitere Modellierung des Kanals wird beschrieben durch eine Parabel 2. Grades mit der Funktionsgleichung: $g(x) = \frac{1}{50}x^2 - 8$. Zeige, dass die Kanalbreite und die Kanaltiefe dieselben Ausmaße haben wie bei der Modellierung mit der Kosinusfunktion f(x). Um wie viel Quadratmeter unterscheiden sich die Querschnittflächen der beiden Kanalmodellierungen?

Lösungen: 1a) Nullstellen N(0|0), N(3|0), Tiefpunkt T(0|0), Hochpunkt H(2|8); b) Nullstellen (doppelt, einfach), Verhalten für x->±∞ -> (4); c) $f'(x) = 12x-6x^2$, $f''(x)=12-12x$, $f'''(x)=12$ -> $f''(1)=0$, $f'''(1)=12\neq 0$ -> Wendepunkt, f(1)=4, f'(1)=6 -> Wendetangente: y = 6(x-1)+4 = 6x-2; d) NEW-Regel -> Sattelpunkt S(0|0), Wendepunkt, Hochpunkt; e) Stammfunktion $F(x) = 2x^3-0{,}5x^4$ -> Flächeninhalt $A = {}_0\int^3 f(x)dx = 13{,}5$ FE; f) f(x): Nullstellen N(0|0), N(3|0), Tiefpunkt T(0|0), Hochpunkt H(2|8), Wendepunkt W(1|4) -> Verschiebung um 2 nach links, Streckung um Faktor 3, Spiegelung um x-Achse -> h(x): Nullstellen N(-2|0), N(1|0), H(-2|0), T(0|-24), W(-1|-12).

Aufgabe 1d): Stammfunktion F(x)	Aufgabe 1e): Funktion f(x), Flächeninhalt A	Aufgabe 1f): Funktionen f(x), h(x)
		

2a) Hochpunkt H(2|18,39), durchschnittliche Steigung m = (18,39-0)/(2-0) = 9,2 mm/d^2, Wendepunkt W(4|13,53) mit f'(4) = -3,38 mm/d^2 ; b) Kästchen des Koordinatensystems zwischen Funktion und x-Achse -> $A = {}_0\int^7 f(x)dx \approx 86{,}4$ mm -> Volumen pro Quadratmeter V = 0,0864 m^3 = 86,4 l; c) $f'(t) = (-12{,}5t+25)e^{-0{,}5t} < 0$, wenn t>2 -> fallende Monotonie von f(t); d) F'(t) = f(t) gemäß Produkt- und Kettenregel, integralfreie Darstellung F(t) mit F(0) = 0 -> $F(t) = (-50t-100)e^{-0{,}5t} + 100$ -> maximale Regenmenge 100 mm -> prozentualer Anteil 100/250 = 0,4 = 40 %.

Aufgabe 2d): Stammfunktion F(t)	Aufgabe 3e): Funktion g(x)
	

3a) p = 40 -> b = π/20, c = (0-8)/2 = -4, |a| = 0-(-4) = 4 -> a = -4 => f(x) = -4cos(πx/20)-4; b) Wendepunkte W(±10|-4) mit f'(±10) = ±0,63 = tan(φ) -> maximaler Böschungswinkel φ = 32,2°; c) Querschnittfläche $A_f = {}_{-20}\int^{20} f(x)dx = 160\ m^2$; d) f(x) = 6-8 = -2 => x = ±13,33 -> Breite = 26,66 m; e) g(x) = 0 => x = ±20 -> Kanalbreite = 40 m, g(0) = -8 -> Kanaltiefe = 8 m, Querschnittfläche $A_g = {}_{-20}\int^{20} g(x)dx = 213\ 1/3\ m^2$ -> Differenz = 213 1/3 – 160 = 53 1/3 m^2.

(d = Tag, FE = Flächeneinheiten, l = Liter, LE = Längeneinheiten, m = Meter, m^2 = Quadratmeter, m^3 = Kubikmeter, mm = Millimeter, VE = Volumeneinheiten)