Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Analysis
> Bestimmungsaufgaben II

Einleitung: Allgemeine quadratische Parabeln als ganz rationale Funktionen 2. Grades lassen sich darstellen vermöge von Funktionsgleichungen f(x) vom Typ:

$f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform mit Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$)
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (Produktform mit Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$)
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform mit den Koeffizienten a, b, c).

Bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x) gilt, dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion. Für ganz rationale Funktionen 2. Grades, also allgemeine quadratische Parabeln ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise:

a) Bestimmung der Scheitelform:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizient a, Scheitel $S(x_S\|y_S)$):	$f(x) = a(x-x_S)^2+y_S$
Einsetzen der Koordinaten x_S, y_S des vorgegebenen Scheitelpunkts $S(x_S\|y_S)$:	$f(x) = a(x-x_S)^2+y_S$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$
Aufstellen einer linearen Gleichung mit dem noch unbekannten Koeffizienten a; Lösen der linearen Gleichung durch Umstellen nach a	
Einsetzen des Koeffizienten a in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung:	$f(x) = a(x-x_S)^2+y_S$

b) Bestimmung der Produktform:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizient a, Nullstellen x_1, x_2):	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Einsetzen der x-Koordinaten x_1, y_2 der vorgegebenen Nullstellen $N_1(x_1\|0)$, $N_2(x_2\|0)$:	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$
Aufstellen einer linearen Gleichung mit dem noch unbekannten Koeffizienten a; Lösen der linearen Gleichung durch Umstellen nach a	
Einsetzen des Koeffizienten a in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung:	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

c) Bestimmung der Normalform:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizienten a, b, c):	$f(x) = ax^2+bx+c$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$
Punkt $Q(x_2\|y_2)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_2) = y_2$
Punkt $R(x_3\|y_3)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_3) = y_3$
Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit den noch unbekannten Koeffizienten a, b, c	
Lösen des linearen Gleichungssystems, bestehend aus den Gleichungen der Punktproben; Berechnung der Koeffizienten a, b, c	
Einsetzen der Koeffizienten a, b, c in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung:	$f(x) = ax^2+bx+c$

Bzgl. der bei Bestimmungsaufgaben verwendeten Gleichungen und linearen Gleichungssystemen gilt noch:

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Lineare Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: ax + b = 0 mit rationalen oder reellen Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für a ≠ 0 dann: $x = -\frac{b}{a}$; ist a = 0, so besitzt die Gleichung keine Lösung (L = {}; b≠0) oder unendlich viele Lösungen (L = **R**; b=0) (L als Lösungsmenge). Bei den Gleichungsumformungen gelten die algebraischen Gesetzmäßigkeiten (Punkt- vor Strichrechnung, Auflösen von Klammern in Termen, Vorzeichenregeln, Rechnen mit negativen und positiven Zahlen, Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, Addition bzw. Subtraktion, Multiplikation bzw. Division in Gleichungen u.a.).

Ein lineares Gleichungssystem z.B. aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich mit dem Gauß-Algorithmus lösen für ein lineares Gleichungssystem allgemein mit n Gleichungen und n Unbekannten der Form:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \ldots & \\ a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & (n) \end{array}$$

mit den reellen Variablen x_1, … x_n, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{nn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, … b_n. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & ... \\ a_{nn} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Allgemein gilt nun für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gauß-Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gauß-Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus in Stufen- oder Dreiecksform, das auf die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß: 3) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n = b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1}+dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e - db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Aufgabe 1: Eine allgemeine quadratische Parabel habe den Scheitelpunkt S(-1|2) und verlaufe durch den Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems. Bestimme die Scheitel- und Normalform der Parabel.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit Hilfe der Scheitelform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Scheitelform mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$ (*).

II. Einsetzen des vorgegebenen Scheitelpunkts S(-1|2) in den Ansatz (*) ergibt bei $x_s = -1$ und $y_s = 2$:

$f(x) = a(x-(-1))^2 + 2 = a(x+1)^2 + 2$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts O in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt O(0|0): $0 = a(0+1)^2 + 2 \Rightarrow a = -2$.

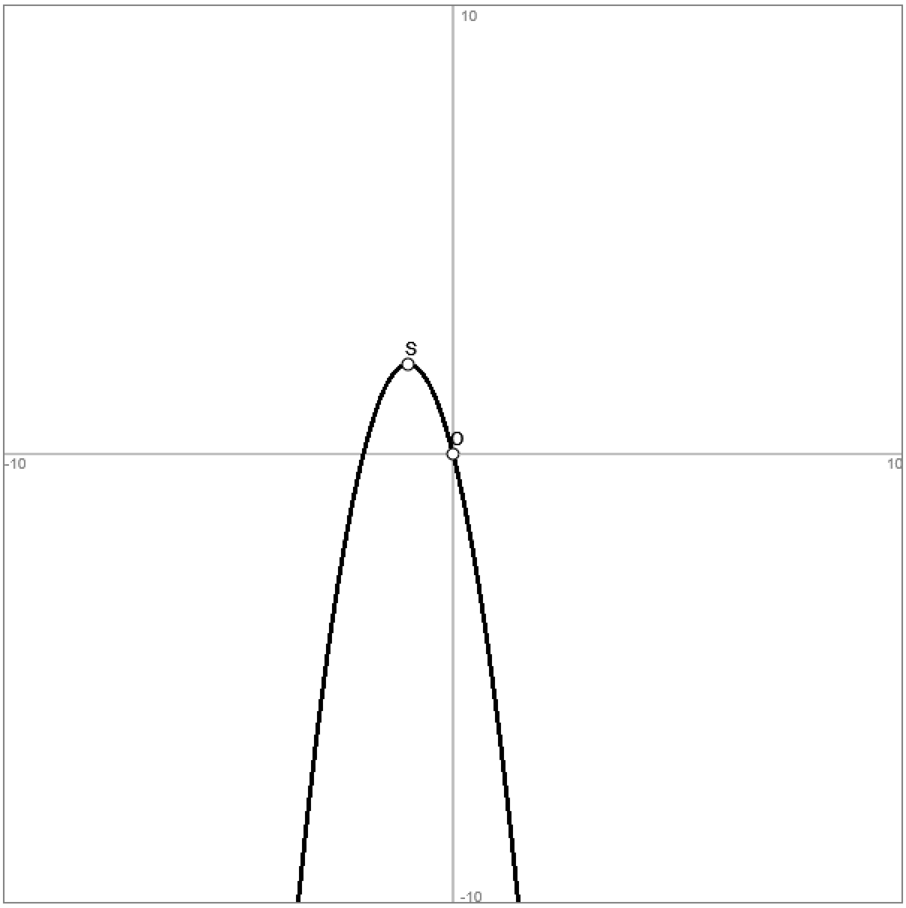
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Scheitelform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = -2(x+1)^2 + 2$.

V. Unter Verwendung der binomischen Formeln (Auflösen der Klammer) ergibt sich die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = -2, b = -4, c = 0:

$f(x) = -2x^2 - 4x$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = -2x^2 - 4x$



Aufgabe 2: Bestimme die Scheitel- und Normalform einer allgemeinen Parabel durch den Scheitelpunkt S(2|-5) und die Nullstelle N(6|0).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit Hilfe der Scheitelform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Scheitelform mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$ (*).

II. Einsetzen des vorgegebenen Scheitelpunkts S(2|-5) in den Ansatz (*) ergibt bei $x_s = 2$ und $y_s = -5$:

$f(x) = a(x-2)^2 + (-5) = a(x-2)^2 - 5$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts N in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt N(6|0): $0 = a(6-2)^2 - 5 \Rightarrow a = 0.3125$.

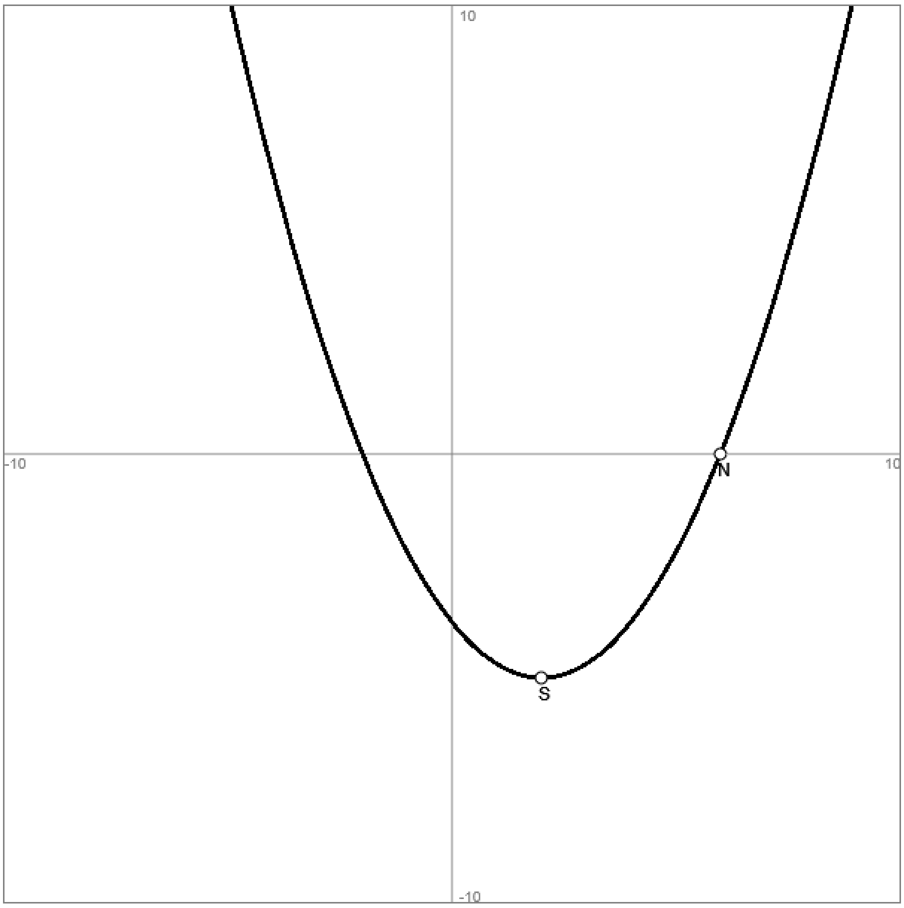
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Scheitelform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = 0.3125(x-2)^2 - 5$.

V. Unter Verwendung der binomischen Formeln (Auflösen der Klammer) ergibt sich die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = 0.3125, b = -1.25, c = -3.75:

$f(x) = 0.3125x^2 - 1.25x - 3.75$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = 0.3125x^2 - 1.25x - 3.75$



Aufgabe 3: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel durch den Scheitelpunkt S(-3|0) sowie den Punkt P(2|4).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit Hilfe der Scheitelform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Scheitelform mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$ (*).

II. Einsetzen des vorgegebenen Scheitelpunkts S(-3|0) in den Ansatz (*) ergibt bei $x_s = -3$ und $y_s = 0$:

$f(x) = a(x-(-3))^2 = a(x+3)^2$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts P in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt P(2|4): $4 = a(2+3)^2 \Rightarrow a = 0.16$.

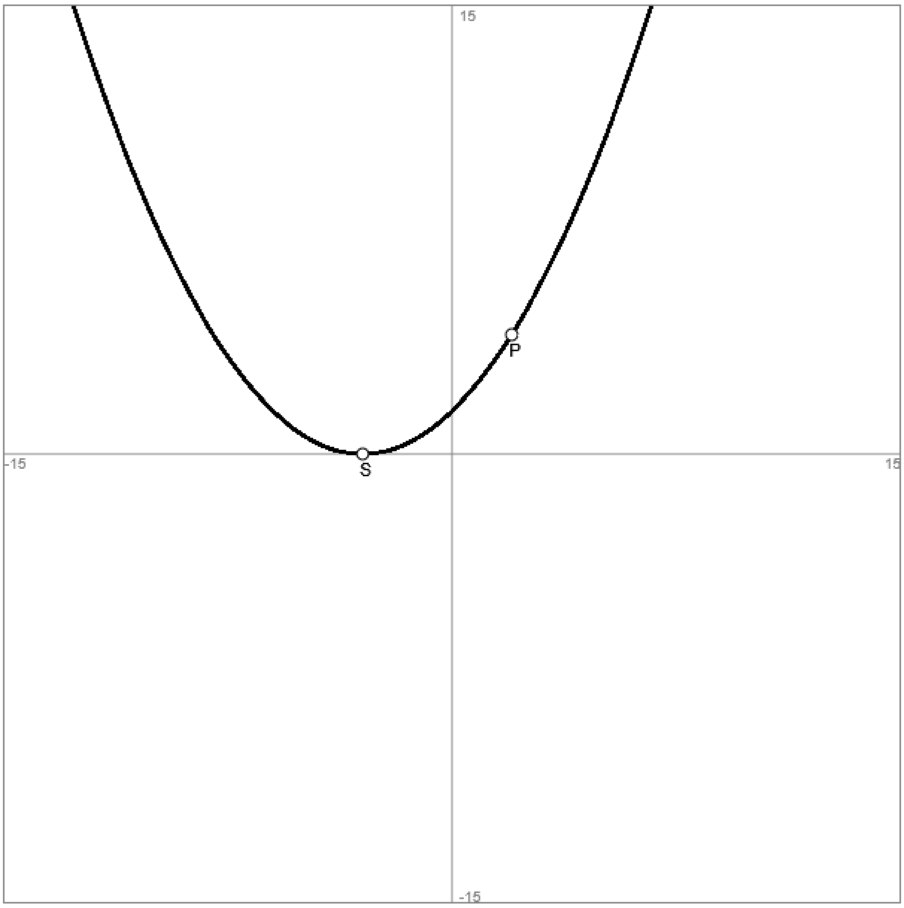
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Scheitelform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = 0.16(x+3)^2$.

V. Unter Verwendung der binomischen Formeln (Auflösen der Klammer) ergibt sich die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = 0.16, b = 0.96, c = 1.44:

$f(x) = 0.16x^2 + 0.96x + 1.44$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = 0.16x^2 + 0.96x + 1.44$



Aufgabe 4: Die Kurve einer allgemeinen quadratischen Parabel verläuft durch die einzige Nullstelle N(3|0) und durch den Punkt P(-2|5).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Scheitelform der Parabel.

Lösung: I. Besitzt eine quadratische Parabel nur eine Nullstelle, so ist diese auch der Scheitelpunkt der Funktion. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Scheitelform mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und mit reellem Koeffizienten a folgt dann dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$ (*).

II. Einsetzen des vorgegebenen Scheitelpunkts N(3|0) in den Ansatz (*) ergibt bei $x_s = 3$ und $y_s = 0$:

$f(x) = a(x-3)^2 + 0 = a(x-3)^2$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts P in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt P(-2|5): $5 = a((-2)-3)^2 \Rightarrow a = 0.2$.

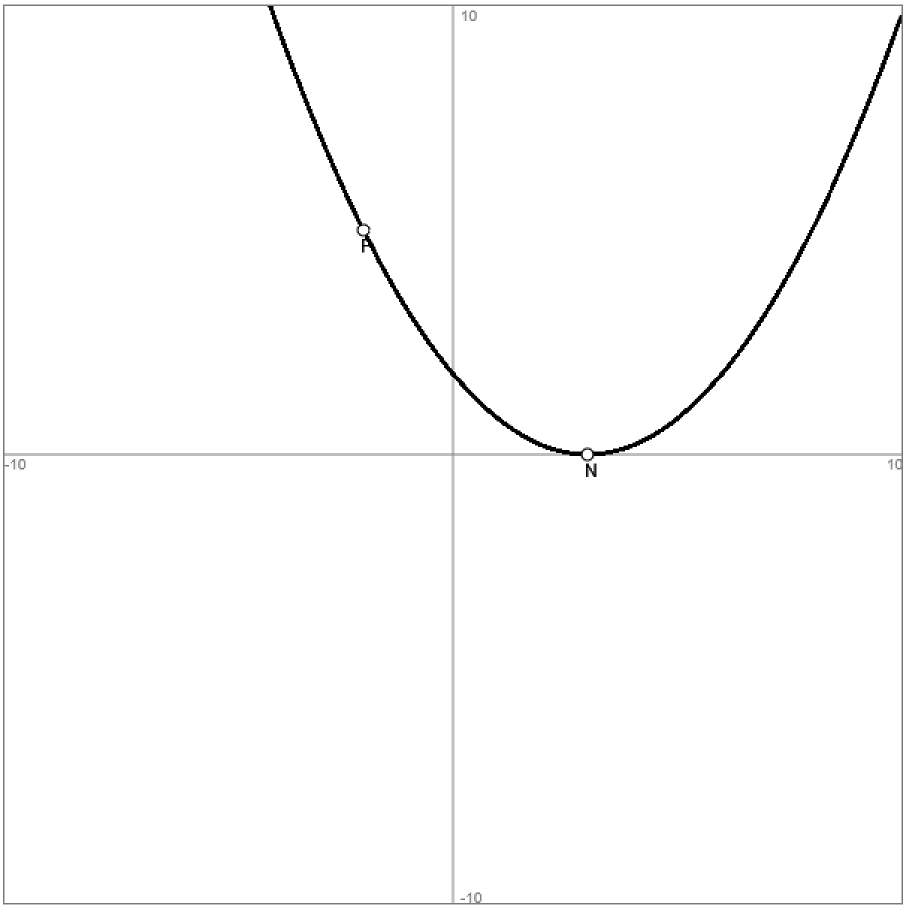
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Scheitelform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = 0.2(x-3)^2$ (***).

V. Unter Verwendung der binomischen Formeln beim Auflösen der eventuell vorhandenen Klammer in der Scheitelform (***) ergibt sich die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = 0.2, b = -1.2, c = 1.8:

$f(x) = 0.2x^2 - 1.2x + 1.8$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = 0.2x^2 - 1.2x + 1.8$



Aufgabe 5: Die Kurve einer allgemeinen quadratischen Parabel verläuft durch die Achsenschnittpunkte des x-y-Koordinatensystems $N_1(-4|0)$, $N_2(5|0)$ (x-Achse) und $S_y(0|2)$ (y-Achse). Wie lautet der Funktionsterm der Parabel?

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit Hilfe der Produktform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Produktform mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (*).

II. Einsetzen der vorgegebenen Nullstellen $N_1(-4|0)$, $N_2(5|0)$ in den Ansatz (*) ergibt:

$f(x) = a(x-(-4))(x-5) = a(x+4)(x-5)$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts S_y in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt $S_y(0|2)$: $2 = a\cdot(0+4)(0-5) \Rightarrow a = -0.1$.

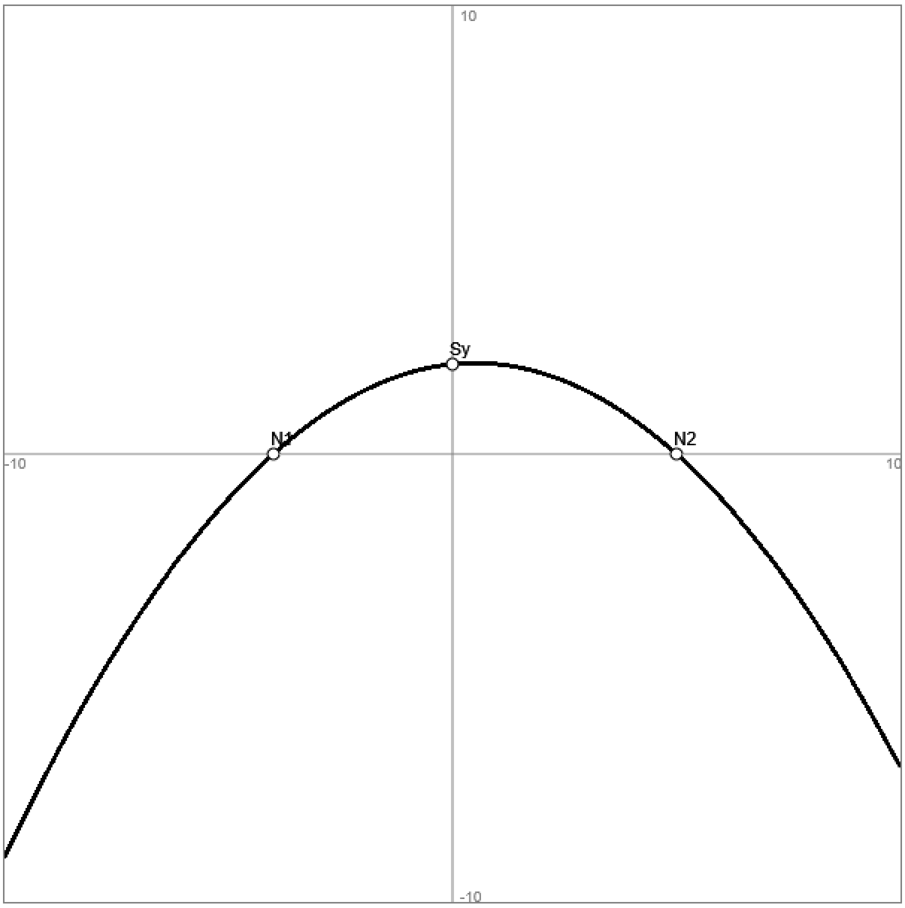
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Produktform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = -0.1(x+4)(x-5)$.

V. Ausmultiplizieren der Klammern ergibt die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = -0.1, b = 0.1, c = 2:

$f(x) = -0.1x^2 + 0.1x + 2$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = -0.1x^2 + 0.1x + 2$



Aufgabe 6: Gesucht ist der Funktionsterm einer quadratischen Parabel, deren Kurve durch die Nullstellen $N_1(-1|0)$, $N_2(2|0)$ sowie den Punkt P(4|3) verläuft.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit Hilfe der Produktform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Produktform mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (*).

II. Einsetzen der vorgegebenen Nullstellen N1(-1|0), N2(2|0) in den Ansatz (*) ergibt:

$f(x) = a(x-(-1))(x-2) = a(x+1)(x-2)$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts P in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt P(4|3): $3 = a\cdot(4+1)(4-2) \Rightarrow a = 0.3$.

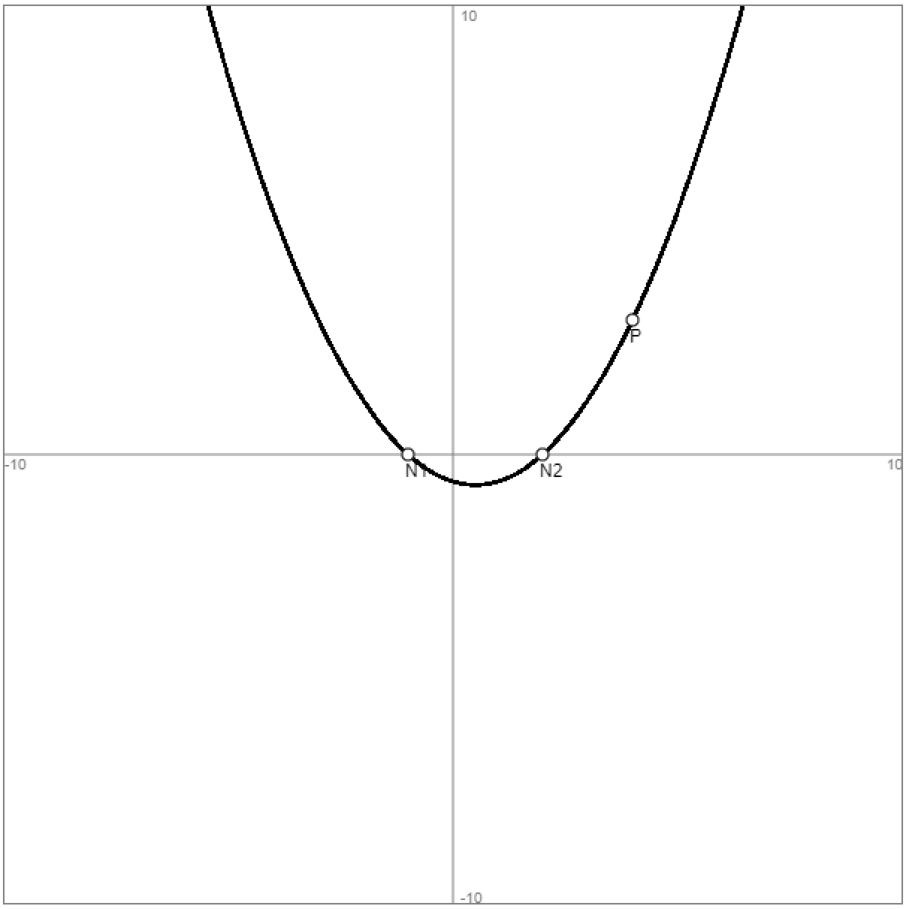
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Produktform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = 0.3(x+1)(x-2)$.

V. Ausmultiplizieren der Klammern ergibt die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = 0.3, b = -0.3, c = -0.6:

$f(x) = 0.3x^2 - 0.3x - 0.6$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = 0.3x^2 - 0.3x - 0.6$



Aufgabe 7: Die Kurve einer allgemeinen quadratischen Parabel verläuft durch die Nullstellen $N_1(-2|0)$, $N_2(4|0)$ und den Punkt P(2|15). Bestimme den Funktionsterm der Parabel.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit Hilfe der Produktform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Produktform mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (*).

II. Einsetzen der vorgegebenen Nullstellen $N_1(-2|0)$, $N_2(4|0)$ in den Ansatz (*) ergibt:

$f(x) = a(x-(-2))(x-4) = a(x+2)(x-4)$ (**).

III. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts P in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt P(2|15): $15 = a\cdot(2+2)(2-4) \Rightarrow a = -1.875$.

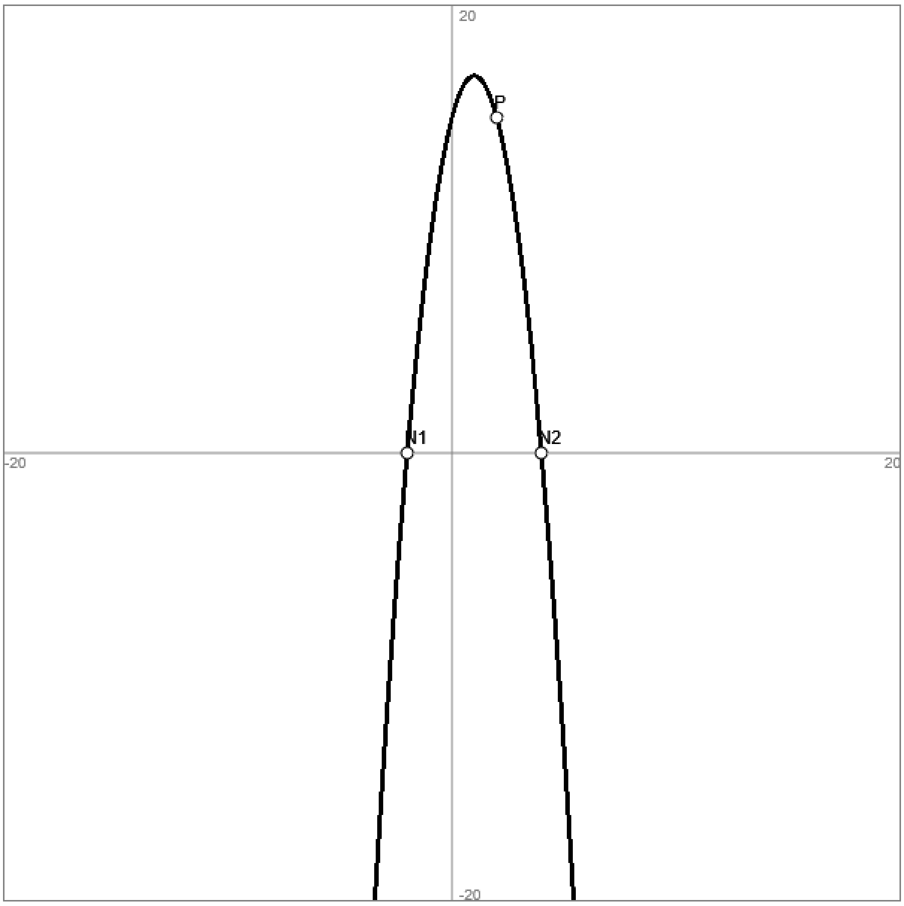
IV. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Produktform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = -1.875(x+2)(x-4)$.

V. Ausmultiplizieren der Klammern ergibt die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a = -1.875, b = 3.75, c = 15:

$f(x) = -1.875x^2 + 3.75x + 15$.

VI. Funktionsgraph: $f(x) = -1.875x^2 + 3.75x + 15$



Aufgabe 8: Auf der Kurve einer allgemeinen quadratischen Parabel liegen die Nullstellen $N_1(-2|0)$, $N_2(4|0)$ und der Punkt P(2|15). Bestimme den Funktionsterm der Parabel.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte N1, N2, P in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:
Punkt N1(-1|0): $a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 0$
Punkt N2(4|0): $a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = 0$
Punkt P(1|-6): $a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -6$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1a & - & 1b & + & 1c & = & 0 \\ + & 16a & + & 4b & + & 1c & = & 0 \\ + & 1a & + & 1b & + & 1c & = & -6 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 16*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & -15 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{array}$$

2. Schritt: 10*(*3*) - 1*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -60 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1a & - & 1b & + & 1c & = & 0 \\ & & + & 20b & - & 15c & = & 0 \\ & & & & + & 15c & = & -60 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$c = -4$
$b = -3$
$a = 1$

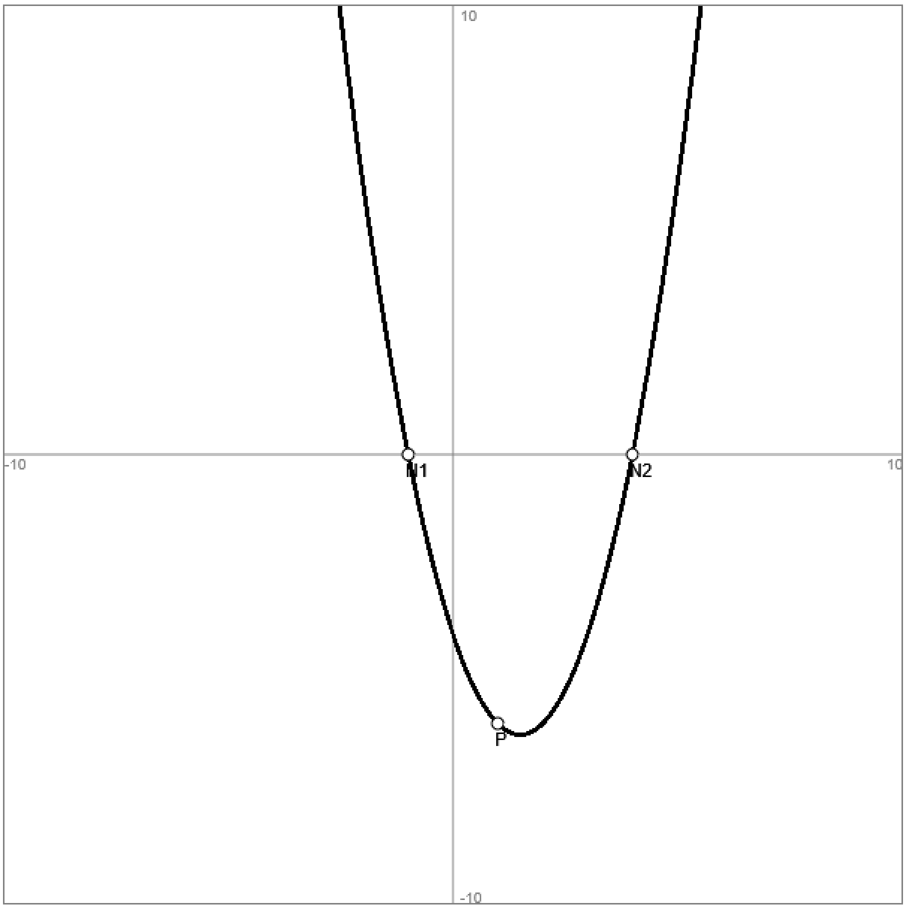
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = 1\cdot x^2 + (-3)\cdot x + (-4)$

und damit:

$f(x) = x^2 - 3x - 4.$

V. Funktionsgraph: $f(x) = x^2 - 3x - 4$



Aufgabe 9: Gesucht ist der Funktionsterm einer quadratischen Parabel durch die drei vorgegebenen Punkte A(0|6), B(3|12), C(5|-4).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte A, B, C in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt A(0|6): $a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 6$
Punkt B(3|12): $a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 12$
Punkt C(5|-4): $a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = -4$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & + & 1c & = & 6 \\ + & 9a & + 3b & + & 1c & = & 12 \\ + & 25a & + 5b & + & 1c & = & -4 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & 12 \\ 25 & 5 & 1 & -4 \end{array}$$

Zeilentausch: (*1*) <-> (*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 25 & 5 & 1 & -4 \end{array}$$

1. Schritt: 9*(*3*) - 25*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -30 & -16 & -336 \end{array}$$

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & -30 & -16 & -336 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & -30 & -16 & -336 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & 9a & + & 3b & + & 1c & = 12 \\ & & - & 30b & - & 16c & = -336 \\ & & & & + & 1c & = 6 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 6$
$b = 8$
$a = -2$

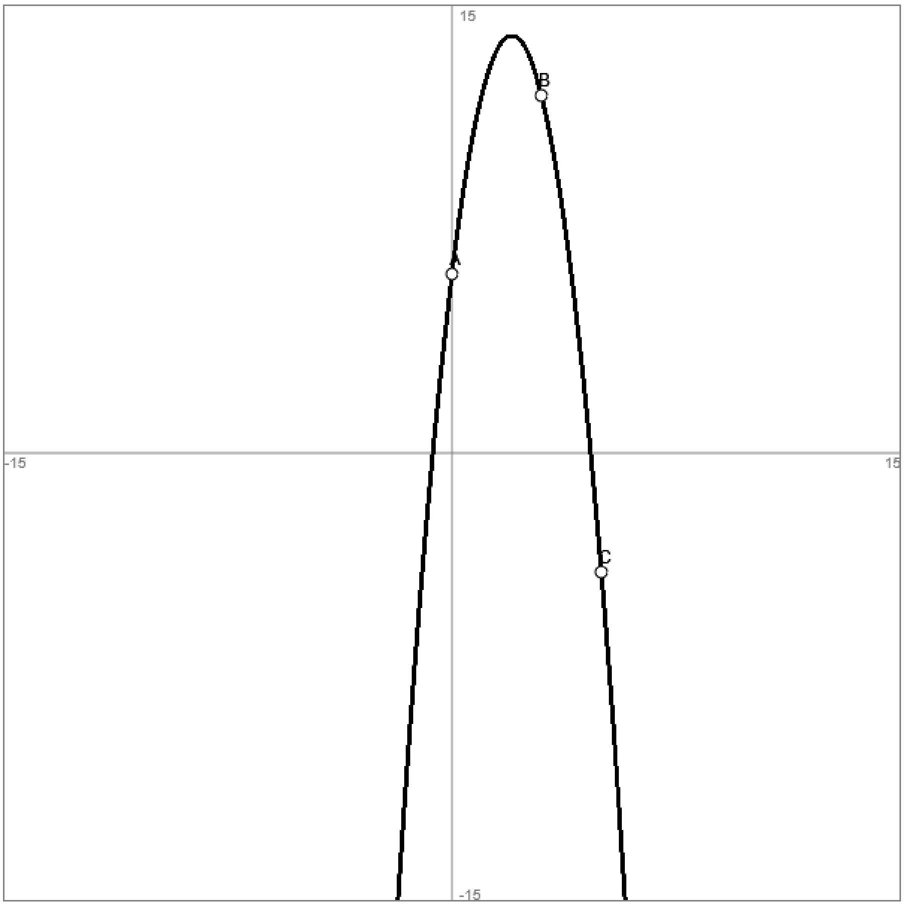
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = -2\cdot x^2 + 8\cdot x + 6$

und damit:

$f(x) = -2x^2 + 8x + 6$.

V. <u>Funktionsgraph</u>: $f(x) = -2x^2 + 8x + 6$



Aufgabe 10: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel durch die drei vorgegebenen Punkte P(-2|-9), Q(2|2), R(4|12).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte P, Q, R in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt P(-2|-9): $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -9$
Punkt Q(2|2): $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2$
Punkt R(4|12): $a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 12$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} + & 4a & - & 2b & + & 1c & = & -9 \\ + & 4a & + & 2b & + & 1c & = & 2 \\ + & 16a & + & 4b & + & 1c & = & 12 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -9 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 16 & 4 & 1 & 12 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 12 & -3 & 48 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) - 3*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} + & 4a & - & 2b & + & 1c & = & -9 \\ & & + & 4b & & & = & 11 \\ & & & & - & 3c & = & 15 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$c = -5$
$b = 2.75$
$a = 0.375$

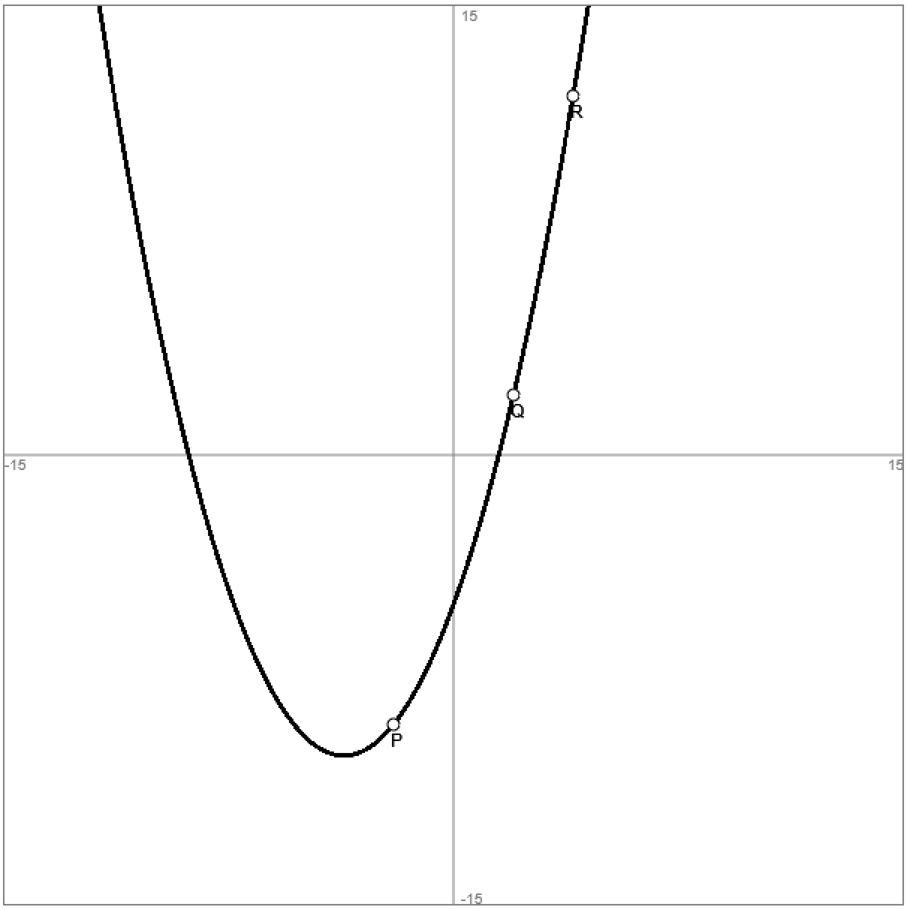
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = 0.375 \cdot x^2 + 2.75 \cdot x + (-5)$

und damit:

$f(x) = 0.375x^2 + 2.75x - 5.$

V. <u>Funktionsgraph</u>: $f(x) = 0.375x^2 + 2.75x - 5$



Aufgabe 11: Bestimme den Funktionsterm einer quadratischen Parabel durch die drei vorgegebenen Punkte A(-3|11), B(2|1), C(4|11).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte A, B, C in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt A(-3|11): $a\cdot(-3)^2 + b\cdot(-3) + c = 11$
Punkt B(2|1): $a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 1$
Punkt C(4|11): $a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = 11$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 9a & - & 3b & + & 1c & = & 11 \\ + & 4a & + & 2b & + & 1c & = & 1 \\ + & 16a & + & 4b & + & 1c & = & 11 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & -3 & 1 & 11 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 11 \end{array}$$

1. Schritt: 9*(*2*) - 4*(*1*) / 9*(*3*) - 16*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 30 & 5 & -35 \\ 0 & 84 & -7 & -77 \end{array}$$

2. Schritt: 5*(*3*) - 14*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 9 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 30 & 5 & -35 \\ 0 & 0 & -105 & 105 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 9a & - & 3b & + & 1c & = & 11 \\ & & + & 30b & + & 5c & = & -35 \\ & & & & - & 105c & = & 105 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -1$
$b = -1$
$a = 1$

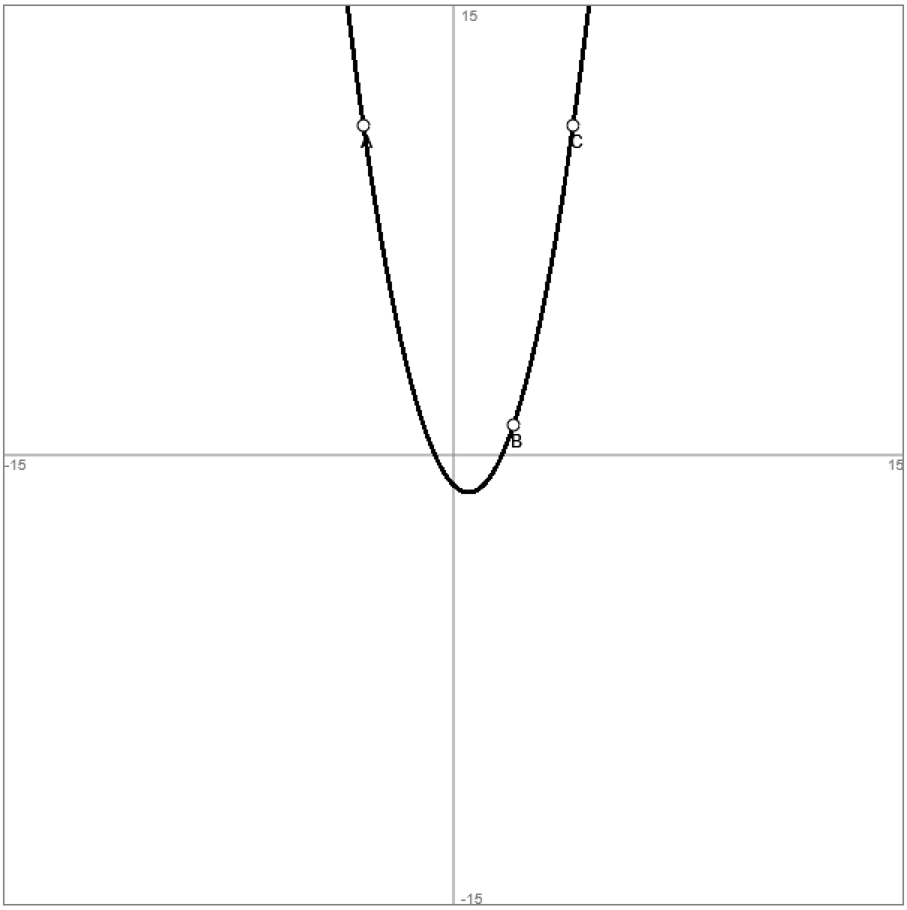
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = 1\cdot x^2 + (-1)\cdot x + (-1)$

und damit:

$f(x) = x^2 - x - 1$.

V. Funktionsgraph: $f(x) = x^2 - x - 1$



Aufgabe 12: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel durch die drei vorgegebenen Punkte P(-2|-5), Q(-1|0.5), R(3|-7.5).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte P, Q, R in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt P(-2|-5): $a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = -5$
Punkt Q(-1|0.5): $a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 0.5$
Punkt R(3|-7.5): $a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = -7.5$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 4a & - & 2b & + & 1c & = & -5 \\ + & 1a & - & 1b & + & 1c & = & 0.5 \\ + & 9a & + & 3b & + & 1c & = & -7.5 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 0.5 \\ 9 & 3 & 1 & -7.5 \end{array}$$

1. Schritt: 4*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 9*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 30 & -5 & 15 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) + 15*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 40 & 120 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 4a & - & 2b & + & 1c & = & -5 \\ & & - & 2b & + & 3c & = & 7 \\ & & & & + & 40c & = & 120 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 3$
$b = 1$
$a = -1.5$

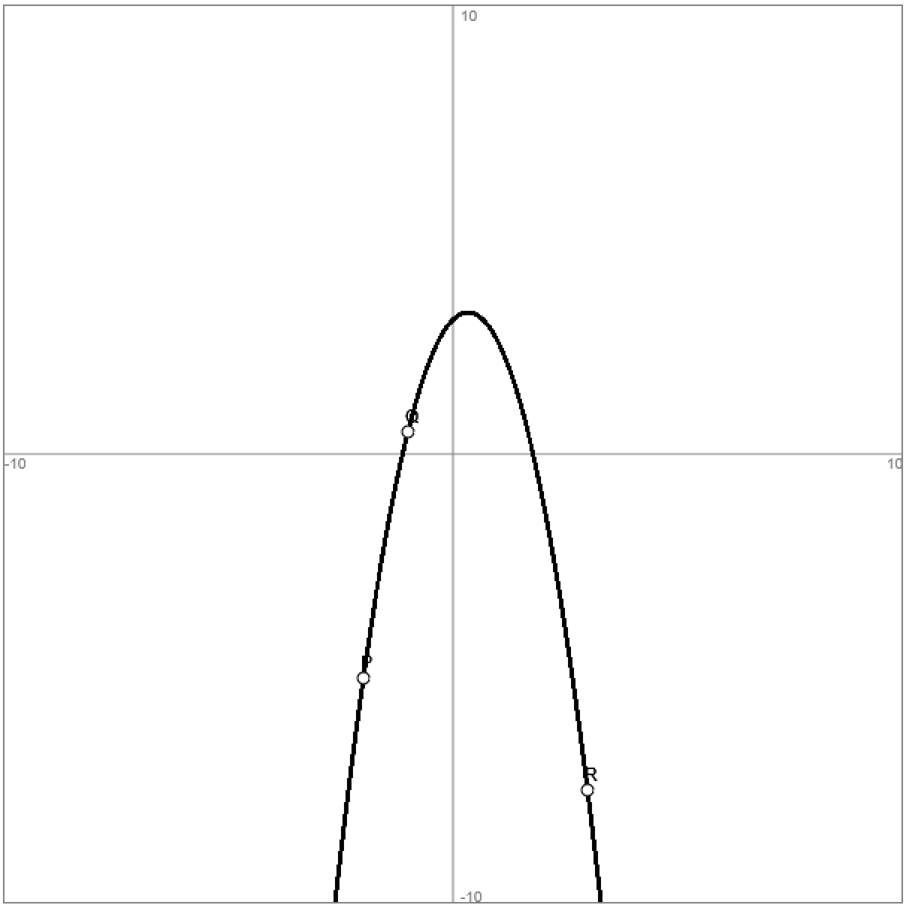
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = -1.5\cdot x^2 + 1\cdot x + 3$

und damit:

$f(x) = -1.5x^2 + x + 3$.

V. <u>Funktionsgraph</u>: $f(x) = -1.5x^2 + x + 3$



Aufgabe 13: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel durch die drei vorgegebenen Punkte N(-5|0), Q(-1|0.5), R(3|-7.5).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte L, M, N in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt L(-1|6): $a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 6$
Punkt M(3|-14): $a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = -14$
Punkt N(5|0): $a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = 0$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1a & - & 1b & + & 1c & = & 6 \\ + & 9a & + & 3b & + & 1c & = & -14 \\ + & 25a & + & 5b & + & 1c & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & -14 \\ 25 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 9*(*1*) / 1*(*3*) - 25*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 12 & -8 & -68 \\ 0 & 30 & -24 & -150 \end{array}$$

2. Schritt: 2*(*3*) - 5*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 12 & -8 & -68 \\ 0 & 0 & -8 & 40 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1a & - & 1b & + & 1c & = & 6 \\ & & + & 12b & - & 8c & = & -68 \\ & & & & - & 8c & = & 40 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -5$
$b = -9$
$a = 2$

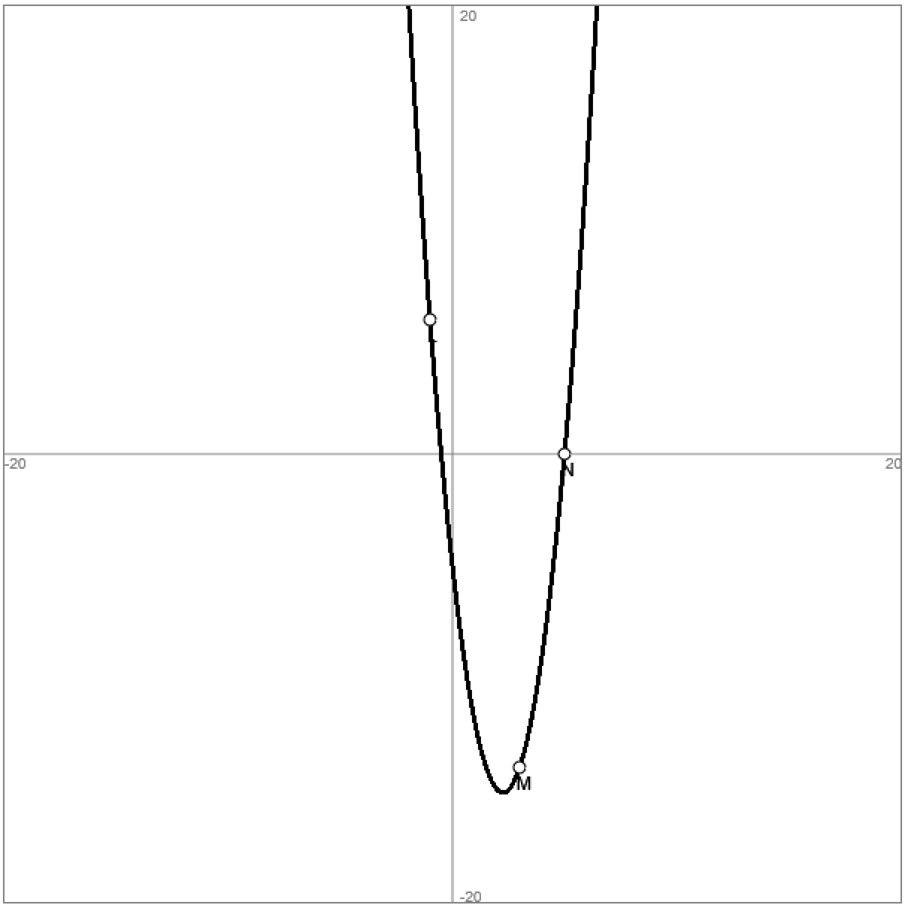
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = 2\cdot x^2 + (-9)\cdot x + (-5)$

und damit:

$f(x) = 2x^2 - 9x - 5.$

V. <u>Funktionsgraph</u>: $f(x) = 2x^2 - 9x - 5$



Aufgabe 14: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel, deren Kurve durch die Punkte P(-4|-4), Q(-2|14), R(6|6) verläuft.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte P, Q, R in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt P(-4|-4): $a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c = -4$
Punkt Q(-2|14): $a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 14$
Punkt R(6|6): $a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + c = 6$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$+\ 16a - 4b + 1c = -4$$
$$+\ 4a - 2b + 1c = 14$$
$$+\ 36a + 6b + 1c = 6$$

Anfangstableau:

16	-4	1	|	-4
4	-2	1	|	14
36	6	1	|	6

1. Schritt: 4*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 9*(*1*) /

16	-4	1	|	-4
0	-4	3	|	60
0	60	-5	|	60

2. Schritt: 1*(*3*) + 15*(*2*) /

16	-4	1	|	-4
0	-4	3	|	60
0	0	40	|	960

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+\ 16a - 4b + 1c = -4$$
$$- 4b + 3c = 60$$
$$+\ 40c = 960$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$c = 24$
$b = 3$
$a = -1$

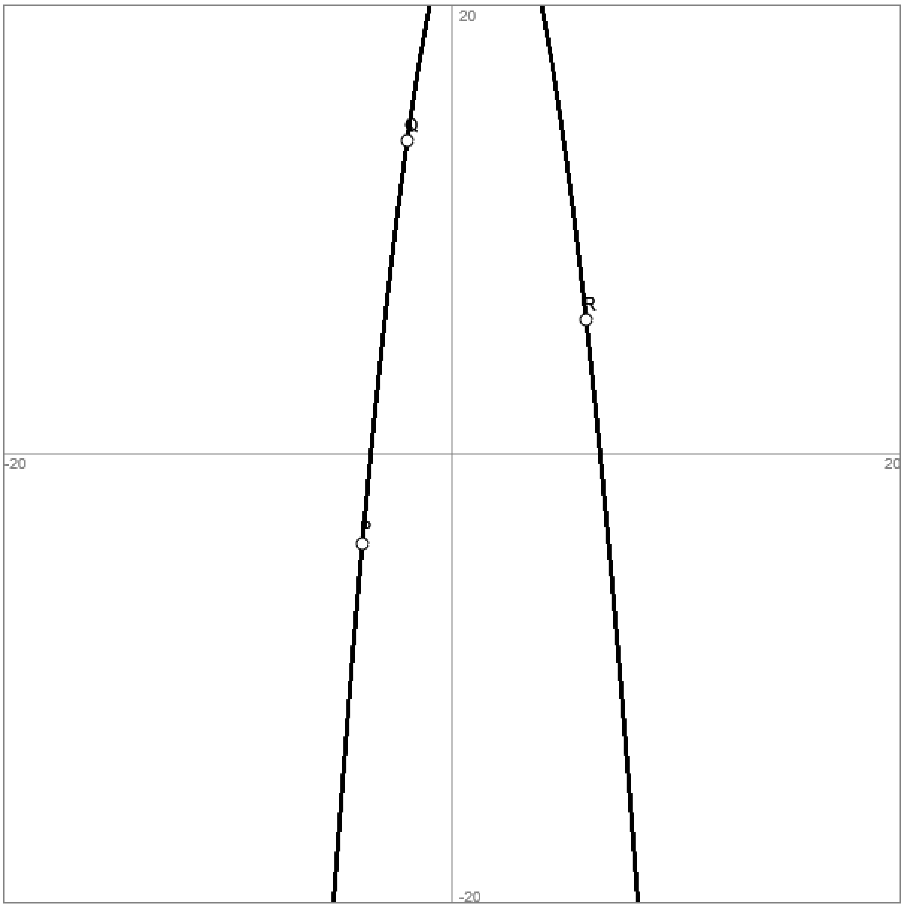
IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = -1\cdot x^2 + 3\cdot x + 24$

und damit:

$f(x) = -x^2 + 3x + 24$.

V. <u>Funktionsgraph</u>: $f(x) = -x^2 + 3x + 24$



Aufgabe 15: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel, deren Kurve durch die Punkte P(-6|1), Q(-3|-6,5), R(-2|-7) verläuft.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt hier mit Hilfe der Normalform der Parabel.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte P, Q, R in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt P(-6|1): $a\cdot(-6)^2 + b\cdot(-6) + c = 1$
Punkt Q(-3|-6.5): $a\cdot(-3)^2 + b\cdot(-3) + c = -6.5$
Punkt R(-2|-7): $a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = -7$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} + & 36a & - & 6b & + & 1c & = & 1 \\ + & 9a & - & 3b & + & 1c & = & -6.5 \\ + & 4a & - & 2b & + & 1c & = & -7 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 36 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 & -6.5 \\ 4 & -2 & 1 & -7 \end{array}$$

1. Schritt: 4*(*2*) - 1*(*1*) / 9*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 36 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -27 \\ 0 & -12 & 8 & -64 \end{array}$$

2. Schritt: -1*(*3*) + 2*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 36 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -27 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} + & 36a & - & 6b & + & 1c & = & 1 \\ & & - & 6b & + & 3c & = & -27 \\ & & & & - & 2c & = & 10 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -5$
$b = 2$
$a = 0.5$

IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = 0.5\cdot x^2 + 2\cdot x + (-5)$

und damit:

$f(x) = 0.5x^2 + 2x - 5.$

V. Funktionsgraph: $f(x) = 0.5x^2 + 2x - 5$