Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Analysis
> Bestimmungsaufgaben III

Einleitung: Bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x) gilt, dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion.
Im Rahmen der Funktionsbestimmung ganz rationaler Funktionen (Polynome) f: **R** -> **R** mit Funktionsterm: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ (für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n) werden die Koeffizienten des gesuchten Funktionsterms auf Grund vorgegebener Eigenschaften der Funktion ermittelt:

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Funktion und Ableitungen:		
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 + b = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 + 2b = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 3bx_1^3 + 2cx_2 + d = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 6bx_3 + 2c = y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		
Aufstellen des linearen Gleichungssystems:		
Gleichungen mit Unbekannten a, b, … gemäß den Funktionseigenschaften:		
Punkt $P(x_1\|y_1)$: Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$: Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt: y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$: Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = y_1$ $f(x_0) = 0$ $f(0) = 0$ $f(0) = y_0$ $f(x_1) = g(x_1)$	
Steigung m in x_1: Berührpunkt x_1 mit der x-Achse: Ursprung O(0|0) als Berührpunkt: Tangente y = mx+c in x_1: Normale y = mx+c in x_1: Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f'(x_1) = m$ $f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$ $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ $f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$ $f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$ $f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$	
Hoch-/Tiefpunkt x_E: Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_€)$:	$f'(x_E) = 0$ $f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$	
Krümmung k in x_1: Wendepunkt x_W: Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$: Wendetangente y = mx+c in x_W: Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f''(x_1) = k$ $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$	
Sattelpunkt x_S: Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$::	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$ $f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$	
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->		
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$:	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$:	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_{€})$:	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$:	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Bestimmungsaufgabe für symmetrische ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Bzgl. der bei Bestimmungsaufgaben verwendeten Gleichungen und linearen Gleichungssystemen gilt noch:

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Lineare Gleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: ax + b = 0 mit rationalen oder reellen Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für a ≠ 0 dann: $x = -\frac{b}{a}$; ist a = 0, so besitzt die Gleichung keine Lösung (L = {}; b≠0) oder unendlich viele Lösungen (L = **R**; b=0) (L als Lösungsmenge). Bei den Gleichungsumformungen gelten die algebraischen Gesetzmäßigkeiten (Punkt- vor Strichrechnung, Auflösen von Klammern in Termen, Vorzeichenregeln, Rechnen mit negativen und positiven Zahlen, Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, Addition bzw. Subtraktion, Multiplikation bzw. Division in Gleichungen u.a.).

Ein lineares Gleichungssystem z.B. aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich mit dem Gauß-Algorithmus lösen für ein lineares Gleichungssystem allgemein mit n Gleichungen und n Unbekannten der Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \qquad (n)$$

mit den reellen Variablen x_1, … x_n, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{nn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, … b_n. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & ... \\ a_{nn} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt nun für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gauß-Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gauß-Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus in Stufen- oder Dreiecksform, das auf die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß: 3) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a\neq0$ und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n= b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c\neq0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1}+dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e – db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = e/c – db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Werden innerhalb einer Bestimmungsaufgabe einer ganz rationalen Funktion f(x) die notwendigen Bedingungen für Hoch- bzw. Tiefpunkte $f'(x_E) = 0$ oder für Wendepunkte $f''(x_W) = 0$ verwendet, so ist eine Probe erforderlich, um festzustellen, ob die hinreichenden Bedingungen $f''(x_E) < 0$ (Hochpunkt) bzw. $f''(x_E) > 0$ (Tiefpunkt) oder $f'''(x_W) \neq 0$ ebenfalls erfüllt sind. Ist dies nicht der Fall, so gibt es offensichtlich keine ganz rationale Funktion, die die vorgegebenen Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 1: Eine allgemeine quadratische Parabel verläuft durch die drei vorgegebenen Punkte A(-2|2), B(1|5), C(4|-1).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; Eigenschaften:

Punkt A(-2|2): f(-2) = 2 -> Gleichung: $a*(-2)^2 + b*(-2) + c = 2$
Punkt B(1|5): f(1) = 5 -> Gleichung: $a*1^2 + b*1 + c = 5$
Punkt C(4|-1): f(4) = -1 -> Gleichung: $a*4^2 + b*4 + c = -1$

II. Koeffizientenbestimmung: 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

+ 4*a* - 2*b* + 1*c* = 2
+ 1*a* + 1*b* + 1*c* = 5
+ 16*a* + 4*b* + 1*c* = -1

Anfangstableau:

4	-2	1	|	2
1	1	1	|	5
16	4	1	|	-1

1. Schritt: 4*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) /

4	-2	1	|	2
0	6	3	|	18
0	12	-3	|	-9

2. Schritt: 1*(*3*) - 2*(*2*) /

4	-2	1	|	2
0	6	3	|	18
0	0	-9	|	-45

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

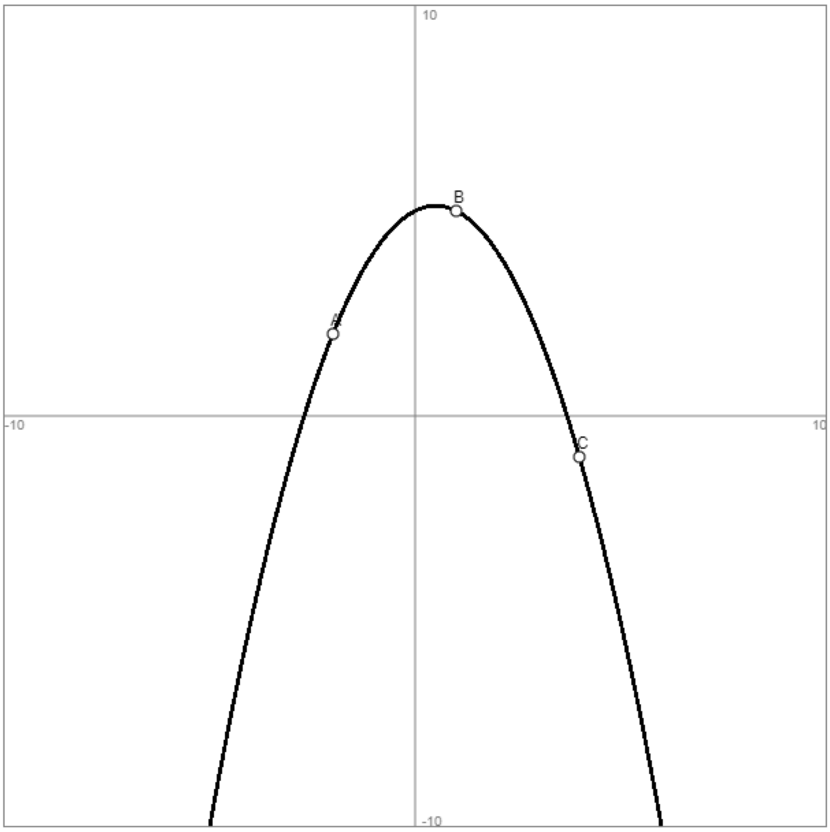
+	4*a*	-	2*b*	+	1*c*	=	2
		+	6*b*	+	3*c*	=	18
				-	9*c*	=	-45

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
c = 5
b = 0.5
a = -0.5

III. Funktion: f(x) = -0.5*x^2 + 0.5*x + 5.

IV. Funktionsgraph:

(x) = -0.5*x^2 + 0.5*x + 5



Aufgabe 2: Gesucht ist der Funktionsterm einer allgemeinen quadratischen Parabel durch die drei vorgegebenen Punkte P(-2|0), Q(-1|-1), R(3|2).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen.

Lösung: I. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

f(x) = ax^2 + bx + c (*).

II. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte P, Q, R in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt P(-2|0): $a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 0$
Punkt Q(-1|-1): $a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = -1$
Punkt R(3|2): $a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 2$

III. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

+	4*a*	-	2*b*	+	1*c*	=	0
+	1*a*	-	1*b*	+	1*c*	=	-1
+	9*a*	+	3*b*	+	1*c*	=	2

Anfangstableau:

4	-2	1	|	0
1	-1	1	|	-1
9	3	1	|	2

1. Schritt: 4*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 9*(*1*) /

4	-2	1	|	0
0	-2	3	|	-4
0	30	-5	|	8

2. Schritt: 1*(*3*) + 15*(*2*) /

4	-2	1	|	0
0	-2	3	|	-4
0	0	40	|	-52

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\ 4a\ -\ 2b\ +\ 1c &= 0 \\ -\ 2b\ +\ 3c &= -4 \\ +\ 40c &= -52 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$c = -1.3$
$b = 0.05$
$a = 0.35$

IV. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt (bei eventuell gerundeten Werten) den gesuchten Funktionsterm:

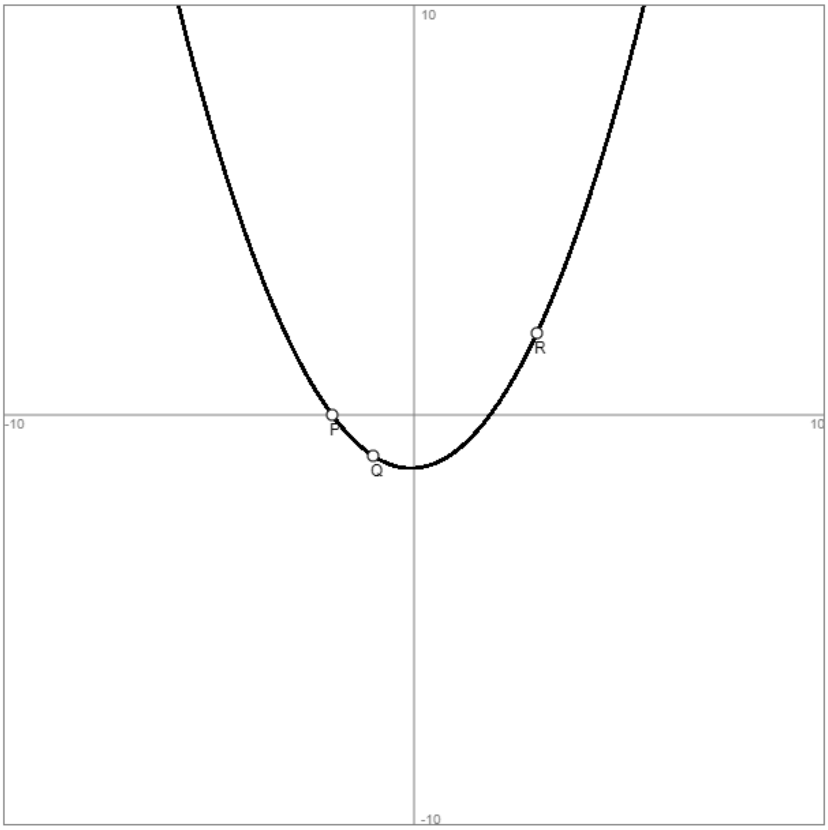
$f(x) = 0.35\cdot x^2 + 0.05\cdot x + (-1.3)$

und damit:

$f(x) = 0.35x^2 + 0.05x - 1.3.$

V. Funktionsgraph:

$f(x) = 0.35x^2 + 0.05x - 1.3.$



Aufgabe 3: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 2. Grades mit Tiefpunkt T(4|-4) durch den Punkt P(2|2).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung.

Lösung: I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$; Eigenschaften:

Punkt T(4|-4): $f(4) = -4$ -> Gleichung: $a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = -4$
Punkt T(4|-4) als Hoch-/Tiefpunkt: $f'(4) = 0$ -> Gleichung: $2a\cdot 4 + b = 0$
Punkt P(2|2): $f(2) = 2$ -> Gleichung: $a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 2$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 16a & + & 4b & + & 1c & = & -4 \\ + & 8a & + & 1b & & & = & 0 \\ + & 4a & + & 2b & + & 1c & = & 2 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & 4 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 4*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 12 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) + 2*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}$$

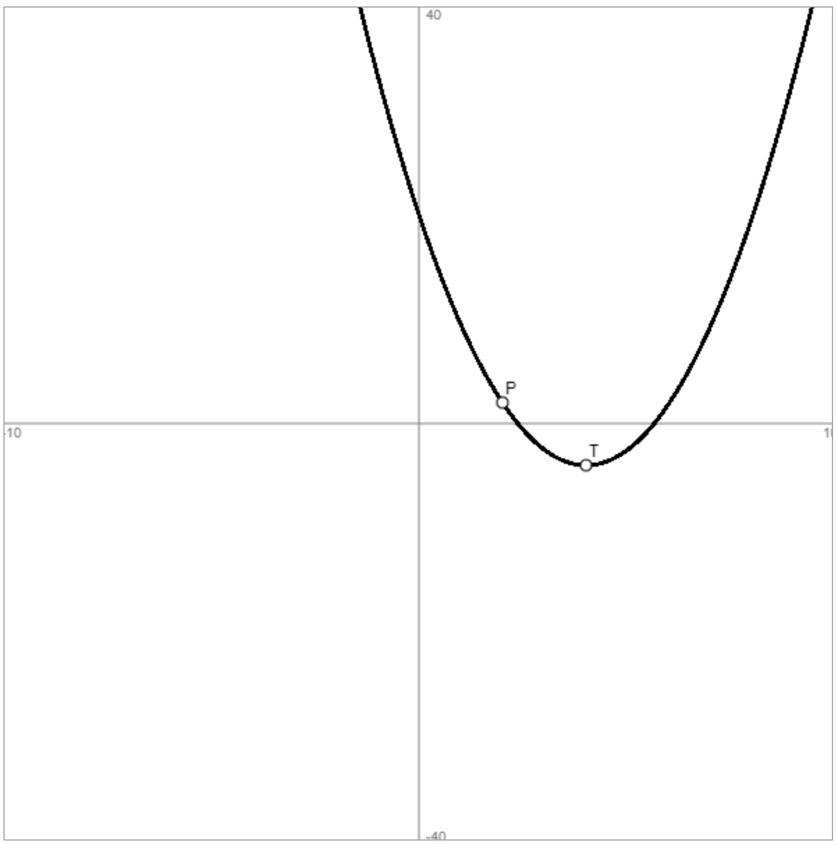
<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 16a & + & 4b & + & 1c & = & -4 \\ & & - & 2b & - & 1c & = & 4 \\ & & & & + & 1c & = & 20 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:
$c = 20$
$b = -12$
$a = 1.5$

III. <u>Funktion</u>: $f(x) = 1.5x^2 - 12x + 20$

IV. <u>Graph</u>: $f(x) = + 1.5x^2 - 12x + 20$



Aufgabe 4: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 2. Grades, die an der Stelle x = -2 die Steigung 0,5, an der Stelle x = 1 die Steigung -1 besitzt sowie die Nullstelle x = 3.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$; Eigenschaften:

Stelle x = -2: f'(-2) = 0.5 -> Gleichung: $2a\cdot(-2) + b = 0.5$
Stelle x = 1: f'(1) = -1 -> Gleichung: $2a\cdot 1 + b = -1$
Punkt N(3|0): f(3) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrl} - & 4a & + & 1b & & & = 0.5 \\ + & 2a & + & 1b & & & = -1 \\ + & 9a & + & 3b & + & 1c & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 0 & 0.5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 2*(*2*) + 1*(*1*) / 4*(*3*) + 9*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 21 & 4 & 4.5 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) - 7*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{array}$$

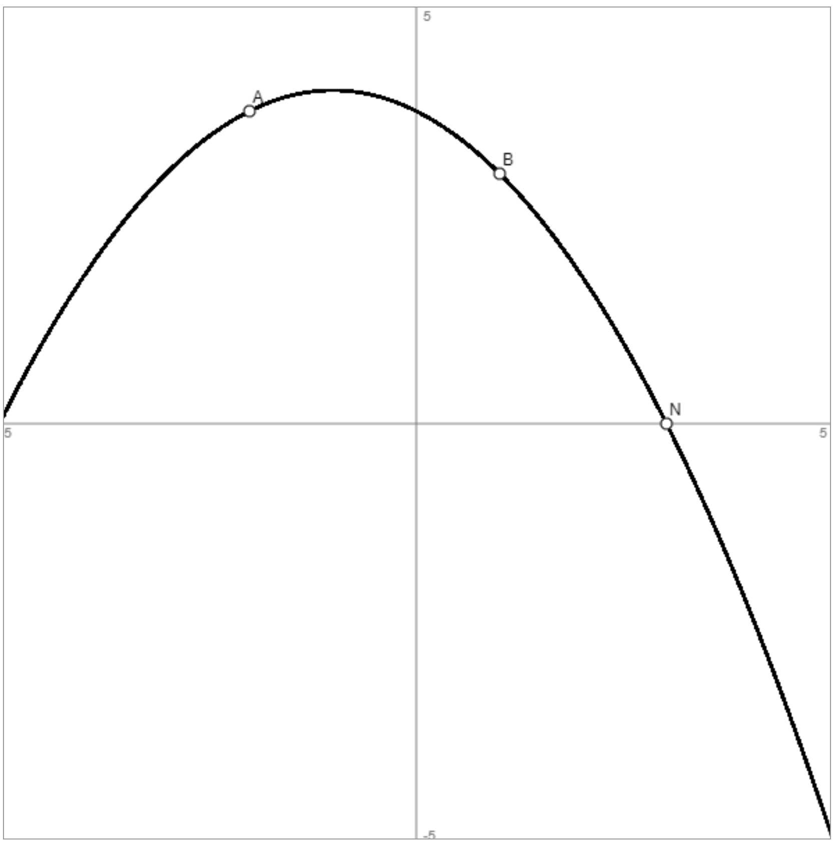
Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrl} - & 4a & + & 1b & & & = 0.5 \\ & & + & 3b & & & = -1.5 \\ & & & & + & 4c & = 15 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$c = 3.75$
$b = -0.5$
$a = -0.25$

III. Funktion: $f(x) = -0.25x^2 - 0.5x + 3.75$

IV. Graph: $f(x) = - 0.25x^2 - 0.5x + 3.75$ (Punkte A(-2|3,75), B(1|3))



Aufgabe 5: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades durch die vier vorgegebenen Punkte A(0|0), B(2|-4), C(4|-8), D(6|0).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; Eigenschaften:

Punkt: A(0|0): f(0) = 0 -> Gleichung: $a*0^3 + b*0^2 + c*0 + d = 0$
Punkt: B(2|-4): f(2) = -4 -> Gleichung: $a*2^3 + b*2^2 + c*2 + d = -4$
Punkt: C(4|-8): f(4) = -8 -> Gleichung: $a*4^3 + b*4^2 + c*4 + d = -8$
Punkt: D(6|0): f(6) = 0 -> Gleichung: $a*6^3 + b*6^2 + c*6 + d = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & & & & & & + & 1d & = & 0 \\ + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ + & 64a & + & 16b & + & 4c & + & 1d & = & -8 \\ + & 216a & + & 36b & + & 6c & + & 1d & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

0	0	0	1	|	0
8	4	2	1	|	-4
64	16	4	1	|	-8
216	36	6	1	|	0

Zeilentausch: (*1*) <-> (*2*) /

8	4	2	1	|	-4
0	0	0	1	|	0
64	16	4	1	|	-8
216	36	6	1	|	0

1. Schritt: 1*(*3*) - 8*(*1*) / 1*(*4*) - 27*(*1*) /

8	4	2	1	|	-4
0	0	0	1	|	0
0	-16	-12	-7	|	24
0	-72	-48	-26	|	108

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-16	-12	-7	|	24
0	0	0	1	|	0
0	-72	-48	-26	|	108

2. Schritt: -2*(*4*) + 9*(*2*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-16	-12	-7	|	24
0	0	0	1	|	0
0	0	-12	-11	|	0

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-16	-12	-7	|	24
0	0	-12	-11	|	0
0	0	0	1	|	0

3. Schritt: (keine Umformung) /

8	4	2	1	|	-4
0	-16	-12	-7	|	24
0	0	-12	-11	|	0
0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

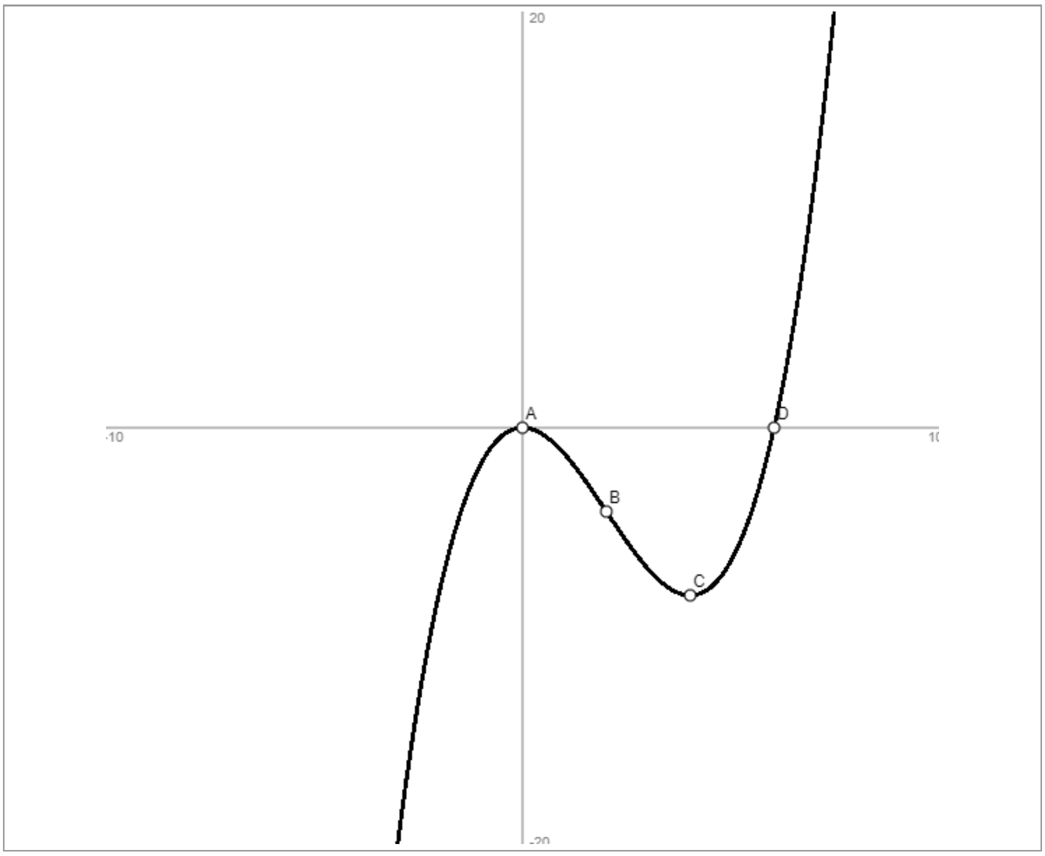
$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ & & - & 16b & - & 12c & - & 7d & = & 24 \\ & & & & - & 12c & - & 11d & = & 0 \\ & & & & & & + & 1d & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$d = 0$
$c = 0$
$b = -1.5$
$a = 0.25$

III. Funktion: $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x^2$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x^2$

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	-3	1.5	Nullstelle A(0|0) = Schnittpunkt A(0|0) = Hochpunkt A(0|0)
2	-4	-3	0	1.5	Wendepunkt B(2|-4)
4	-8	0	3	1.5	Tiefpunkt C(4|-8)
6	0	9	6	1.5	Nullstelle D(6|0)
Graph:					



Aufgabe 6: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades mit A(0|0) als Hoch- und B(2|-4) als Wendepunkt.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. und 2. Ableitung.

Lösung: I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Punkt A(0|0): f(0) = 0 -> Gleichung: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
Punkt A(0|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(0) = 0 -> Gleichung: $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$
Punkt B(2|-4): f(2) = -4 -> Gleichung: $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -4$
Punkt B(2|-4) als Wendepunkt: f''(2) = 0 -> Gleichung: $6a \cdot 2 + 2b = 0$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & & & & & & + & 1d & = & 0 \\ & & & & + & 1c & & & = & 0 \\ + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ + & 12a & + & 2b & & & & & = & 0 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (*1*) <-> (*3*) /

8	4	2	1	|	-4
0	0	1	0	|	0
0	0	0	1	|	0
12	2	0	0	|	0

1. Schritt: 2*(*4*) - 3*(*1*) /

8	4	2	1	|	-4
0	0	1	0	|	0
0	0	0	1	|	0
0	-8	-6	-3	|	12

Zeilentausch: (*2*) <-> (*4*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	0	1	|	0
0	0	1	0	|	0

2. Schritt: (keine Umformung) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	0	1	|	0
0	0	1	0	|	0

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	1	0	|	0
0	0	0	1	|	0

3. Schritt: (keine Umformung) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	1	0	|	0
0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ & & - & 8b & - & 6c & - & 3d & = & 12 \\ & & & & + & 1c & & & = & 0 \\ & & & & & & + & 1d & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
d = 0
c = 0
b = -1.5
a = 0.25

III. Funktion: $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x^2$

IV. Graph: $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x^2$ (siehe oben).

V. Probe (wegen: f'(0) = 0, f''(2) = 0): Der Graph zeigt die Richtigkeit der gefundenen Funktion f(x).

Aufgabe 7: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades mit dem Punkt B(2|-4) als Wendepunkt und den Extremstellen bei x = 0 und x = 4.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. und 2. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Stelle x = 0 als Hoch-/Tiefstelle: f'(0) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0$
Punkt B(2|-4): f(2) = -4 -> Gleichung: $a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = -4$
Punkt B(2|-4) als Wendepunkt: f''(2) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 2 + 2b = 0$
Stelle x = 4 als Hoch-/Tiefstelle: f'(4) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 4^2 + 2b\cdot 4 + c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & & & & + & 1c & & & = & 0 \\ + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ + & 12a & + & 2b & & & & & = & 0 \\ + & 48a & + & 8b & + & 1c & & & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

0	0	1	0	|	0
8	4	2	1	|	-4
12	2	0	0	|	0
48	8	1	0	|	0

Zeilentausch: (*1*) <-> (*2*) /

8	4	2	1	|	-4
0	0	1	0	|	0
12	2	0	0	|	0
48	8	1	0	|	0

1. Schritt: 2*(*3*) - 3*(*1*) / 1*(*4*) - 6*(*1*) /

8	4	2	1	|	-4
0	0	1	0	|	0
0	-8	-6	-3	|	12
0	-16	-11	-6	|	24

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	1	0	|	0
0	-16	-11	-6	|	24

2. Schritt: -1*(*4*) + 2*(*2*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	1	0	|	0
0	0	-1	0	|	0

3. Schritt: 1*(*4*) + 1*(*3*) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	1	0	|	0
0	0	0	0	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ & & - & 8b & - & 6c & - & 3d & = & 12 \\ & & & & + & 1c & & & = & 0 \\ & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Mehrdeutige Lösung des linearen Gleichungssystems.

III. Es gibt keine eindeutig bestimmbare ganz rationale Funktion mit den vorgegebenen Bedingungen, sondern unendlich viele Funktionen, die die Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 8: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades mit dem Punkt B(2|-4) als Wendepunkt, einem Hochpunkt an der Stelle x = 4 und der Nullstelle D(6|0).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. und 2. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Punkt B(2|-4): f(2) = -4 -> Gleichung: $a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = -4$
Punkt B(2|-4) als Wendepunkt: f''(2) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 2 + 2b = 0$
Stelle x = 4 als Hoch-/Tiefstelle: f'(4) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 4^2 + 2b\cdot 4 + c = 0$
Punkt D(6|0): f(6) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 6^3 + b\cdot 6^2 + c\cdot 6 + d = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & -4 \\ + & 12a & + & 2b & & & & & = & 0 \\ + & 48a & + & 8b & + & 1c & & & = & 0 \\ + & 216a & + & 36b & + & 6c & + & 1d & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

8	4	2	1	|	-4
12	2	0	0	|	0
48	8	1	0	|	0
216	36	6	1	|	0

1. Schritt: 2*(2) - 3*(1) / 1*(3) - 6*(1) / 1*(4) - 27*(1) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	-16	-11	-6	|	24
0	-72	-48	-26	|	108

2. Schritt: -1*(3) + 2*(2) / -1*(4) + 9*(2) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	-1	0	|	0
0	0	-6	-1	|	0

3. Schritt: -1*(4) + 6*(3) /

8	4	2	1	|	-4
0	-8	-6	-3	|	12
0	0	-1	0	|	0
0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = -4 \\ & & - & 8b & - & 6c & - & 3d & = 12 \\ & & & & - & 1c & & & = 0 \\ & & & & & & + & 1d & = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$d = 0$
$c = 0$
$b = -1.5$
$a = 0.25$

III. Funktion: $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x^2$

IV. Graph: $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x^2$ (siehe oben).

V. Probe: Die Verwendung der notwendigen Bedingung für den Hochpunkt an der Stelle x = 4 führte auf: $f'(4) = 0$, was aber auch eine Eigenschaft für einen Tiefpunkt ist. In der Tat ist wegen $f'(x) = 0.75x^2 - 1.5$, $f''(x) = 1.5x$: $f'(4) = 0$, $f''(4) > 0$, so dass die ermittelte Funktion f(x) an der Stelle x = 4 einen Tiefpunkt statt des geforderten Hochpunkts hat. Eine ganz rationale Funktion 3. Grades mit den verlangten Eigenschaften existiert somit nicht.

Aufgabe 9: Gesucht ist der Funktionsterm einer durch den Koordinatenursprung verlaufenden ganz rationalen Funktion 3. Grades mit dem Wendepunkt W(-2|-3) und der Steigung der Wendetangente 2.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung und 2. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Punkt W(-1|-3): f(-1) = -3 -> Gleichung: $a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d = -3$
Punkt W(-1|-3): f'(-1) = 2 -> Gleichung: $3a\cdot(-1)^2 + 2b\cdot(-1) + c = 2$
Punkt W(-1|-3) als Wendepunkt: f"(-1) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot(-1) + 2b = 0$
Punkt O(0|0): f(0) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 1a & + & 1b & - & 1c & + & 1d & = -3 \\ + & 3a & - & 2b & + & 1c & & & = 2 \\ - & 6a & + & 2b & & & & & = 0 \\ & & & & & & + & 1d & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

-1	1	-1	1	|	-3
3	-2	1	0	|	2
-6	2	0	0	|	0
0	0	0	1	|	0

1. Schritt: 1*(2) + 3*(1) / -1*(3) + 6*(1) /

-1	1	-1	1	|	-3
0	1	-2	3	|	-7
0	4	-6	6	|	-18
0	0	0	1	|	0

2. Schritt: 1*(*3*) - 4*(*2*) /

-1	1	-1	1	|	-3
0	1	-2	3	|	-7
0	0	2	-6	|	10
0	0	0	1	|	0

3. Schritt: (keine Umformung) /

-1	1	-1	1	|	-3
0	1	-2	3	|	-7
0	0	2	-6	|	10
0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

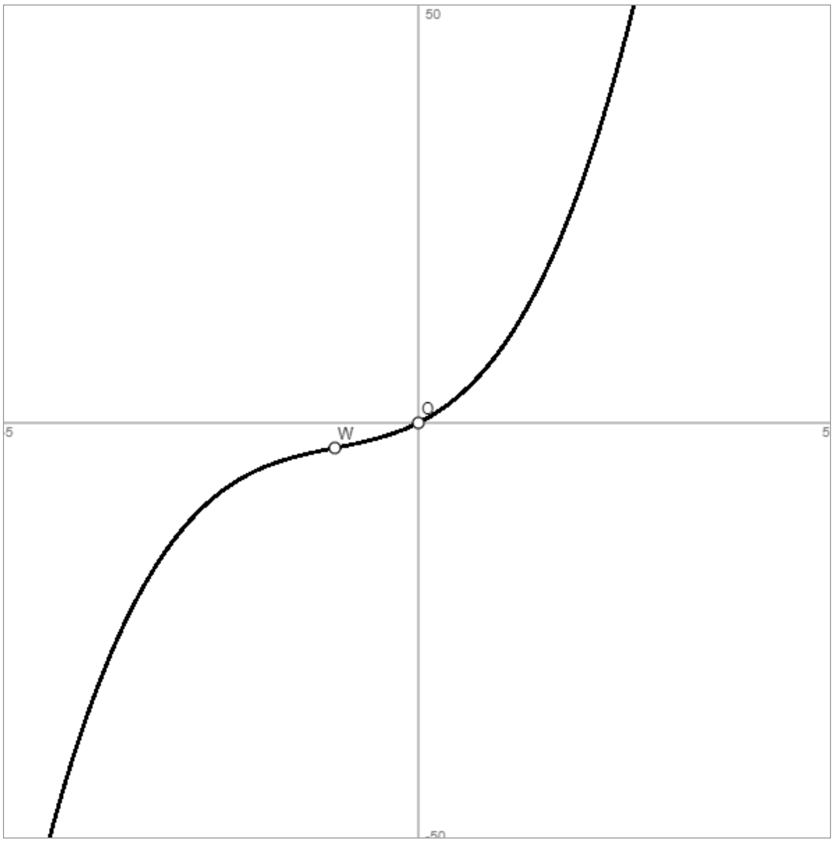
$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
- & 1a & + & 1b & - & 1c & + & 1d & = & -3 \\
 & & + & 1b & - & 2c & + & 3d & = & -7 \\
 & & & & + & 2c & - & 6d & = & 10 \\
 & & & & & & + & 1d & = & 0
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 0$
$c = 5$
$b = 3$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$

IV. Graph: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$



Aufgabe 10: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades, die an der Stelle x = -1 eine einfache, an der Stelle x = 2 eine doppelte Nullstelle besitzt und deren Kurve durch den Punkt P(4|-5) verläuft.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung bzw, mit Hilfe der Produktform für ganz rationale Funktionen.

1. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; Eigenschaften:

Nullstelle $N_1(-1|0)$: f(-1) = 0 -> Gleichung: $a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d = 0$
Nullstelle $N_2(2|0)$: f(2) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 0$
Nullstelle $N_2(2|0)$ als Hoch-/Tiefpunkt: f'(2) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c = 0$
Punkt P(4|-5): f(4) = -5 -> Gleichung: $a\cdot 4^3 + b\cdot 4^2 + c\cdot 4 + d = -5$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 1a & + & 1b & - & 1c & + & 1d & = & 0 \\ + & 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1d & = & 0 \\ + & 12a & + & 4b & + & 1c & & & = & 0 \\ + & 64a & + & 16b & + & 4c & + & 1d & = & -5 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & -5 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) + 8*(*1*) / 1*(*3*) + 12*(*1*) / 1*(*4*) + 64*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 16 & -11 & 12 & 0 \\ 0 & 80 & -60 & 65 & -5 \end{array}$$

2. Schritt: 3*(*3*) - 4*(*2*) / 3*(*4*) - 20*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 15 & -15 \end{array}$$

3. Schritt: -3*(*4*) + 20*(*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & 45 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 1a & + & 1b & - & 1c & + & 1d & = & 0 \\ & & + & 12b & - & 6c & + & 9d & = & 0 \\ & & & & - & 9c & & & = & 0 \\ & & & & & & - & 45d & = & 45 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$d = -1$
$c = 0$
$b = 0.75$
$a = -0.25$

III. Funktion: $f(x) = -0.25x^3 + 0.75x^2 - 1$

IV. Graph: $f(x) = -0.25x^3 + 0.75x^2 – 1$

2. Lösung: I. Eine ganz rationale Funktion lässt als Produkt von Linearfaktoren darstellen, wenn die Summe der Vielfachheiten der reellen Nullstellen der Funktion den Grad der ganz rationalen Funktion ergibt. Dies ist hier bei der zu bestimmenden ganz rationalen Funktion 3. Grades der Fall wegen der einfachen Nullstelle x = -1 (Vielfachheit 1) und der doppelten x = 2 (Vielfachheit 2) bei 1 + 2 = 3 = grad(f(x)).
Der Ansatz in Produktform lautet damit:

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)^2$.

II. Koeffizientenbestimmung: Es sind $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ als Nullstellen, so dass

$f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.

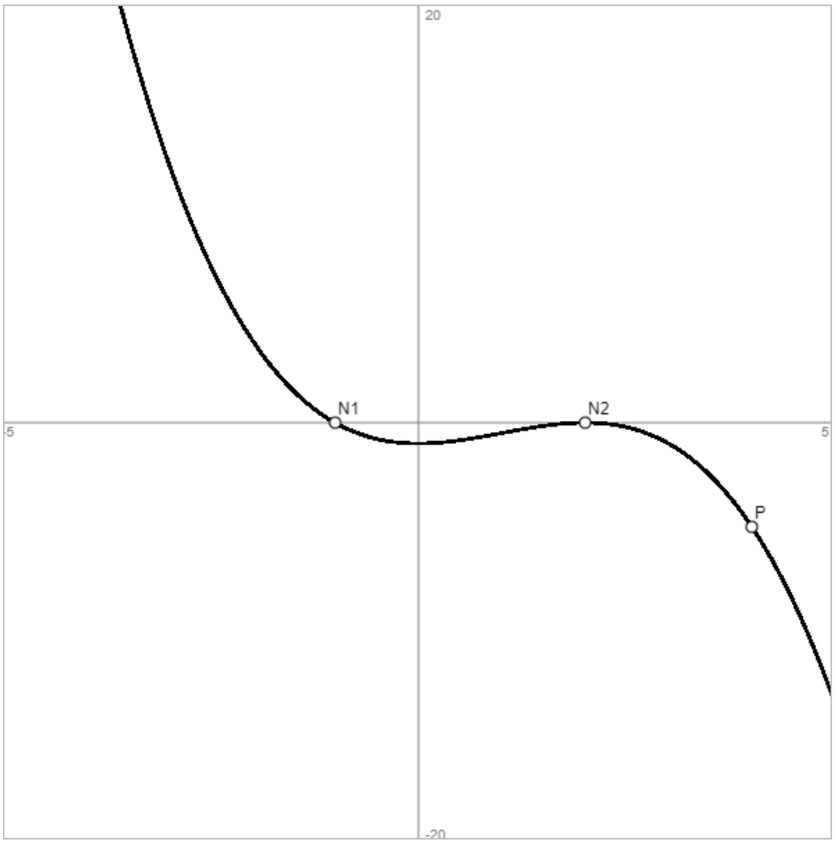
erfüllt ist. Zur Bestimmung des Faktors a erfolgt eine Punktprobe mit dem Punkt
P(4|-5):

$-5 = a(4+1)(4-2)^2 = 20a \Rightarrow a = -0,25$.

III. Die gesuchte Funktion lautet damit:

$f(x) = -0,25(x+1)(x-2)^2$.

Ausrechnen ergibt: $f(x) = -0,25(x+1)(x-2)^2 = -0.25x^3 + 0.75x^2 – 1$ (siehe oben).



Aufgabe 11: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse im Ursprung, besitzt im Punkt H(-1|6,5) einen Hochpunkt und verläuft durch den Punkt P(2|-34). Bestimme den Funktionsterm.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung.

Lösung: I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; Eigenschaften:

Nullstelle O(0|0): f(0) = 0 -> Gleichung: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
Punkt H(-1|6.5): f(-1) = 6.5 -> Gleichung: $a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 6.5$
Punkt H(-1|6.5) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(-1) = 0 -> Gleichung: $3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$
Punkt P(2|-34): f(2) = -34 -> Gleichung: $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -34$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

						+	1*d*	=	0
-	1*a*	+	1*b*	-	1*c*	+	1*d*	=	6.5
+	3*a*	-	2*b*	+	1*c*			=	0
+	8*a*	+	4*b*	+	2*c*	+	1*d*	=	-34

<u>Anfangstableau</u>:

0	0	0	1	|	0
-1	1	-1	1	|	6.5
3	-2	1	0	|	0
8	4	2	1	|	-34

<u>Zeilentausch</u>: (*1*) <-> (*2*) /

-1	1	-1	1	|	6.5
0	0	0	1	|	0
3	-2	1	0	|	0
8	4	2	1	|	-34

<u>1. Schritt</u>: 1*(*3*) + 3*(*1*) / 1*(*4*) + 8*(*1*) /

-1	1	-1	1	|	6.5
0	0	0	1	|	0
0	1	-2	3	|	19.5
0	12	-6	9	|	18

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

-1	1	-1	1	|	6.5
0	1	-2	3	|	19.5
0	0	0	1	|	0
0	12	-6	9	|	18

2. Schritt: 1*(*4*) - 12*(*2*) /

-1	1	-1	1	|	6.5
0	1	-2	3	|	19.5
0	0	0	1	|	0
0	0	18	-27	|	-216

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*) /

-1	1	-1	1	|	6.5
0	1	-2	3	|	19.5
0	0	18	-27	|	-216
0	0	0	1	|	0

3. Schritt: (keine Umformung) /

-1	1	-1	1	|	6.5
0	1	-2	3	|	19.5
0	0	18	-27	|	-216
0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

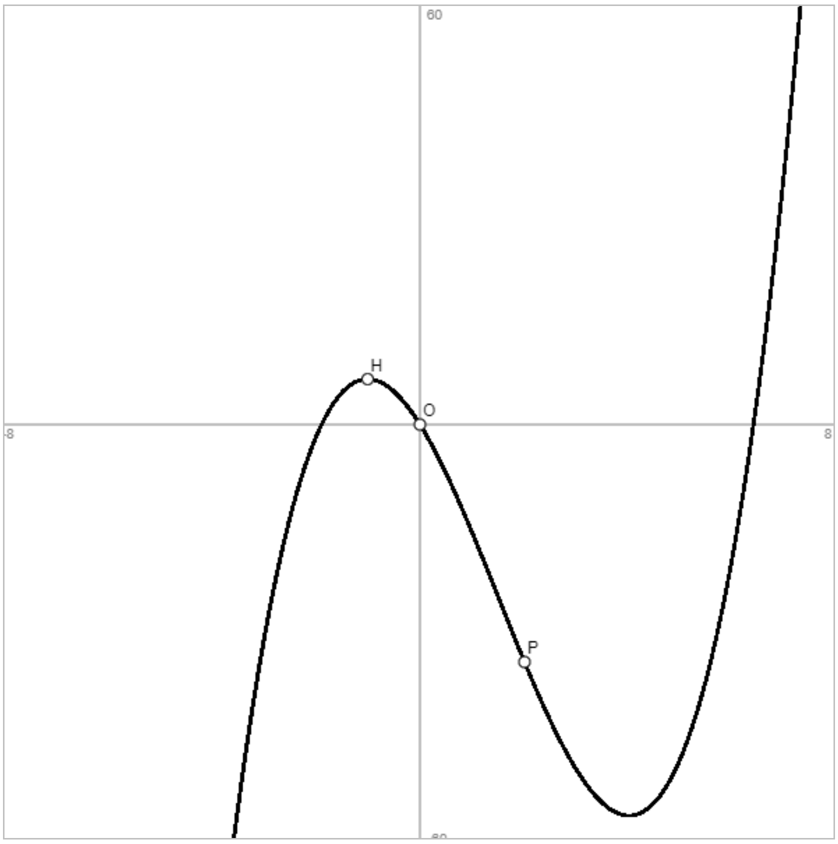
$$\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 1a & + & 1b & - & 1c & + & 1d & = & 6.5 \\ & & + & 1b & - & 2c & + & 3d & = & 19.5 \\ & & & & + & 18c & - & 27d & = & -216 \\ & & & & & & + & 1d & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 0$
$c = -12$
$b = -4.5$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^3 - 4.5x^2 - 12x$

IV. Graph: $f(x) = x^3 - 4.5x^2 - 12x$



Aufgabe 12: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades, die den Tiefpunkt T(-4|-8) und den Wendepunkt W(1|8) besitzt.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung und 2. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Punkt T(-4|-8): f(-4) = -8 -> Gleichung: $a\cdot(-4)^3 + b\cdot(-4)^2 + c\cdot(-4) + d = -8$
Punkt T(-4|-8) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(-4) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot(-4)^2 + 2b\cdot(-4) + c = 0$
Punkt W(1|8): f(1) = 8 -> Gleichung: $a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 8$
Punkt W(1|8) als Wendepunkt: f''(1) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 1 + 2b = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 64a & + & 16b & - & 4c & + & 1d & = & -8 \\ + & 48a & - & 8b & + & 1c & & & = & 0 \\ + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & 8 \\ + & 6a & + & 2b & & & & & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} -64 & 16 & -4 & 1 & -8 \\ 48 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 4*(*2*) + 3*(*1*) / 64*(*3*) + 1*(*1*) / 32*(*4*) + 3*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -64 & 16 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 16 & -8 & 3 & -24 \\ 0 & 80 & 60 & 65 & 504 \\ 0 & 112 & -12 & 3 & -24 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) - 5*(*2*) / 1*(*4*) - 7*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -64 & 16 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 16 & -8 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 100 & 50 & 624 \\ 0 & 0 & 44 & -18 & 144 \end{array}$$

3. Schritt: 25*(*4*) - 11*(*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -64 & 16 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 16 & -8 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 100 & 50 & 624 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 & -3264 \end{array}$$

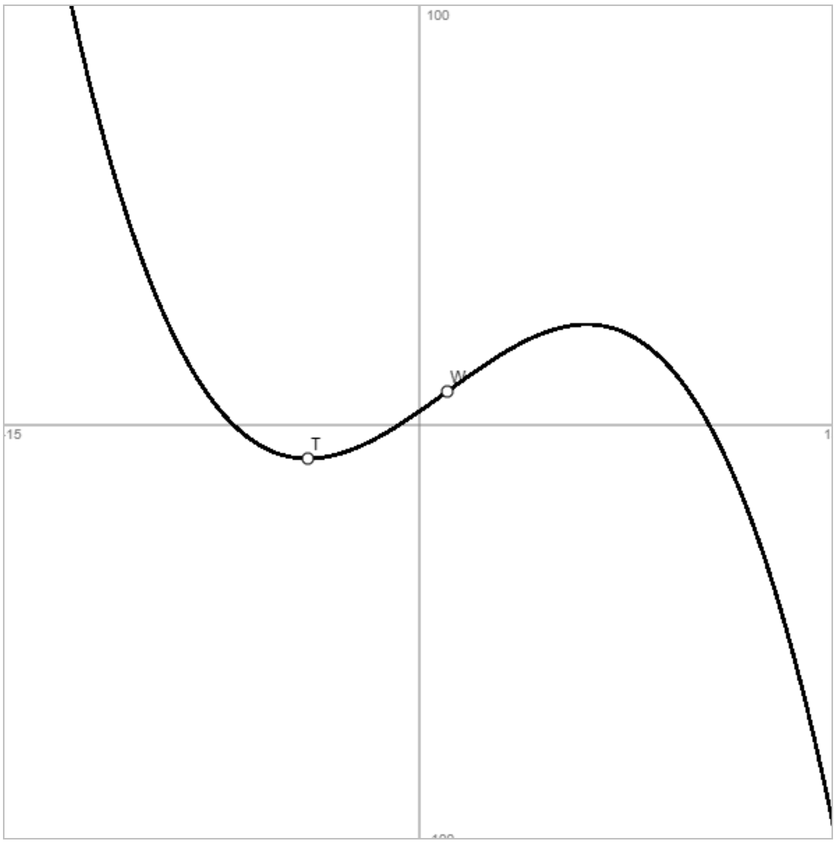
Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 64a & + & 16b & - & 4c & + & 1d & = & -8 \\ & & + & 16b & - & 8c & + & 3d & = & -24 \\ & & & & + & 100c & + & 50d & = & 624 \\ & & & & & & - & 1000d & = & -3264 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$d = 3.264$
$c = 4.608$
$b = 0.192$
$a = -0.064$

III. Funktion: $f(x) = -0.064x^3 + 0.192x^2 + 4.608x + 3.264$

IV. Graph: $f(x) = -0.064x^3 + 0.192x^2 + 4.608x + 3.264$



Aufgabe 13: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades verläuft durch die Punkte P(-2|2) und Q(4|32) und besitzt auf der y-Achse einen Wendepunkt mit y-Koordinate 4.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung und 2. Ableitung.

Lösung: I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Punkt P(-2|2): f(-2) = 2 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = 2$
Punkt W(0|4): f(0) = 4 -> Gleichung: $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 4$
Punkt W(0|4) als Wendepunkt: f''(0) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 0 + 2b = 0$
Punkt Q(4|32): f(4) = 32 -> Gleichung: $a\cdot 4^3 + b\cdot 4^2 + c\cdot 4 + d = 32$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 8a & + & 4b & - & 2c & + & 1d & = & 2 \\ & & & & & & + & 1d & = & 4 \\ & & + & 2b & & & & & = & 0 \\ + & 64a & + & 16b & + & 4c & + & 1d & = & 32 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

-8	4	-2	1	|	2
0	0	0	1	|	4
0	2	0	0	|	0
64	16	4	1	|	32

<u>1. Schritt</u>: 1*(*4*) + 8*(*1*) /

-8	4	-2	1	|	2
0	0	0	1	|	4
0	2	0	0	|	0
0	48	-12	9	|	48

<u>Zeilentausch</u>: (*2*) <-> (*3*) /

-8	4	-2	1	|	2
0	2	0	0	|	0
0	0	0	1	|	4
0	48	-12	9	|	48

2. Schritt: 1*(*4*) - 24*(*2*) /

-8	4	-2	1	|	2
0	2	0	0	|	0
0	0	0	1	|	4
0	0	-12	9	|	48

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*) /

-8	4	-2	1	|	2
0	2	0	0	|	0
0	0	-12	9	|	48
0	0	0	1	|	4

3. Schritt: (keine Umformung) /

-8	4	-2	1	|	2
0	2	0	0	|	0
0	0	-12	9	|	48
0	0	0	1	|	4

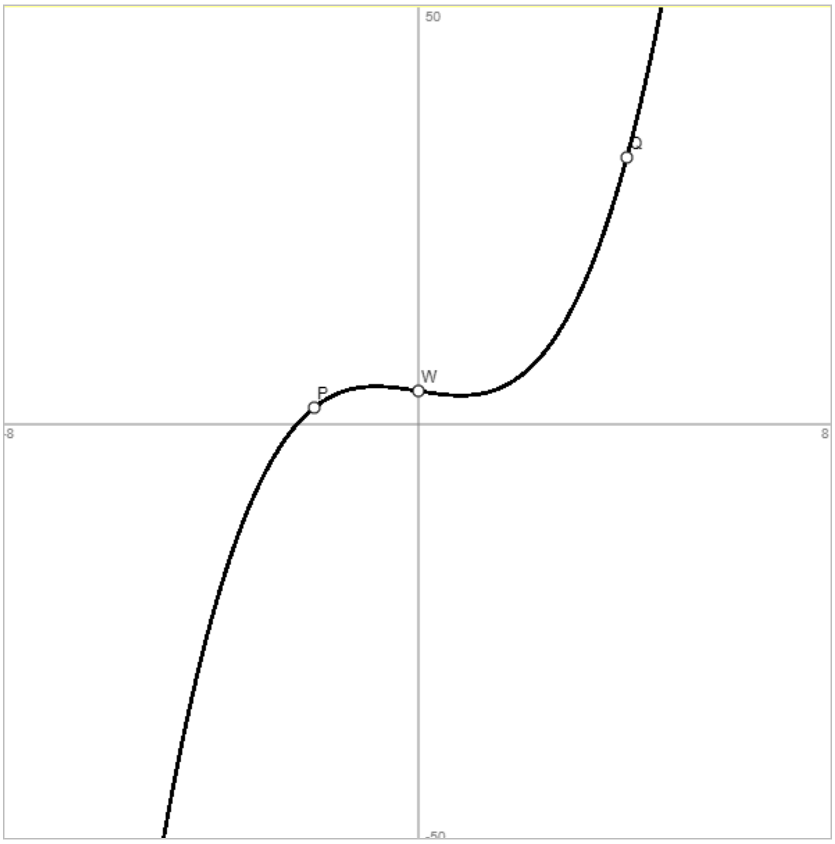
Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} -8a & +4b & -2c & +1d & = 2 \\ & +2b & & & = 0 \\ & & -12c & +9d & = 48 \\ & & & +1d & = 4 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$d = 4$
$c = -1$
$b = 0$
$a = 0.5$

III. Funktion: $f(x) = 0.5x^3 - x + 4$

IV. Graph: $f(x) = 0.5x^3 - x + 4$



Aufgabe 14: Gesucht ist der Funktionsterm einer Parabel 3. Grades, deren Kurve durch den Sattelpunkt S(1|-2) verläuft und eine Nullstelle bei x = 3 hat.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung und 2. Ableitung bzw. mit Hilfe des Ansatzes der verschoben kubischen Parabel.

1. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; Eigenschaften:

Punkt S(1|-2): f(1) = -2 -> Gleichung: $a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = -2$
Punkt S(1|-2): f'(1) = 0 -> Gleichung: $3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0$
Punkt S(1|-2) als Wendepunkt: f''(1) = 0 -> Gleichung: $6a\cdot 1 + 2b = 0$
Nullstelle N(3|0): f(3) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
+ & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & -2 \\
+ & 3a & + & 2b & + & 1c & & & = & 0 \\
+ & 6a & + & 2b & & & & & = & 0 \\
+ & 27a & + & 9b & + & 3c & + & 1d & = & 0
\end{array}
$$

Anfangstableau:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
27 & 9 & 3 & 1 & 0
\end{array}
$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) - 6*(*1*) / 1*(*4*) - 27*(*1*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & -1 & -2 & -3 & 6 \\
0 & -4 & -6 & -6 & 12 \\
0 & -18 & -24 & -26 & 54
\end{array}
$$

2. Schritt: -1*(*3*) + 4*(*2*) / -1*(*4*) + 18*(*2*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & -1 & -2 & -3 & 6 \\
0 & 0 & -2 & -6 & 12 \\
0 & 0 & -12 & -28 & 54
\end{array}
$$

3. Schritt: -1*(*4*) + 6*(*3*) /

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & -1 & -2 & -3 & 6 \\
0 & 0 & -2 & -6 & 12 \\
0 & 0 & 0 & -8 & 18
\end{array}
$$

Dreiecksgestalt des Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
+ & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & -2 \\
 & & - & 1b & - & 2c & - & 3d & = & 6 \\
 & & & & - & 2c & - & 6d & = & 12 \\
 & & & & & & - & 8d & = & 18
\end{array}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
d = -2.25
c = 0.75
b = -0.75
a = 0.25

III. Funktion: $f(x) = 0.25x^3 - 0.75x^2 + 0.75x - 2.25$

IV. Graph: $f(x) = 0.25x^3 - 0.75x^2 + 0.75x - 2.25$

2. Lösung: I. Mit Sattelpunkt $S(x_S|y_S)$ gilt der Ansatz:

$f(x) = a(x-x_S)^3 + y_S$

für die ganz rationale Funktion 3. Grades.

II. Koeffizientenbestimmung: Es folgt wegen des Sattelpunktes S(1|-2):

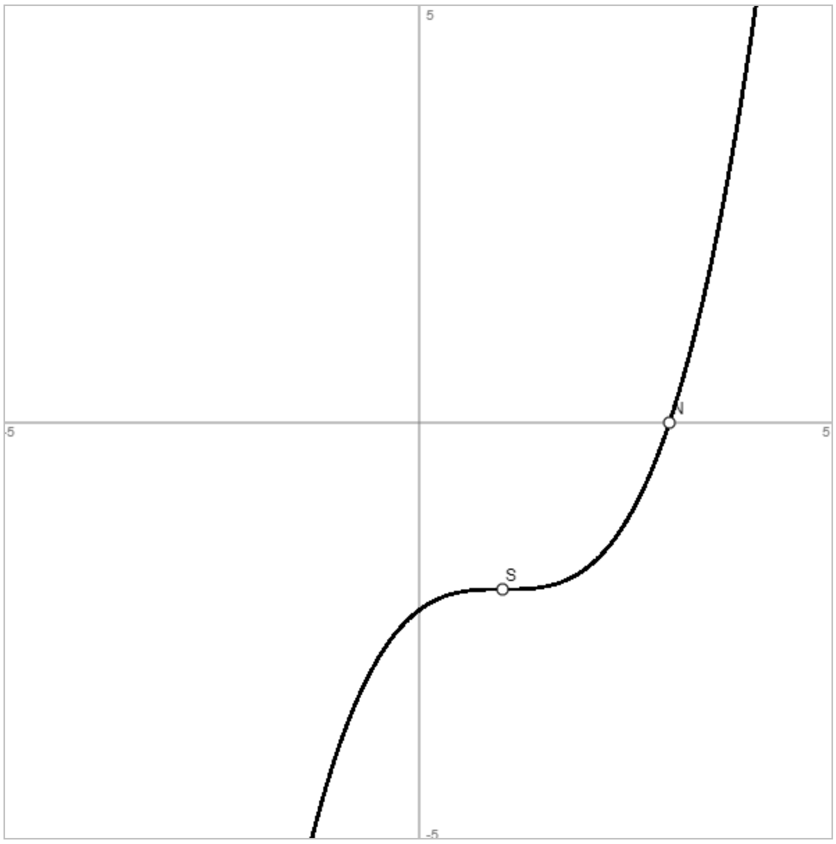
$f(x) = a(x-1)^3 - 2$

und wegen der Nullstelle N(3|0):

$0 = a(3-1)^3 – 2 \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = 0,5$.

III. Funktion:

$f(x) = 0,5(x-1)^3 – 2 = 0.25x^3 - 0.75x^2 + 0.75x - 2.25$ (siehe oben).



Aufgabe 15: Gesucht ist der Funktionsterm einer ganz rationalen Funktion 3. Grades. Der Graph der Funktion verläuft durch den Hochpunkt H(-2|10) und hat im Punkt P(1|-2) die Steigung 1.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; Eigenschaften:

Punkt H(-2|10): $f(-2) = 10$ -> Gleichung: $a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d = 10$
Punkt H(-2|10) als Hoch-/Tiefpunkt: $f'(-2) = 0$ -> Gleichung: $3a\cdot(-2)^2 + 2b\cdot(-2) + c = 0$
Punkt P(1|-2): $f(1) = -2$ -> Gleichung: $a\cdot1^3 + b\cdot1^2 + c\cdot1 + d = -2$
Punkt P(1|-2): $f'(1) = 1$ -> Gleichung: $3a\cdot1^2 + 2b\cdot1 + c = 1$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 8a & + & 4b & - & 2c & + & 1d & = 10 \\ + & 12a & - & 4b & + & 1c & & & = 0 \\ + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = -2 \\ + & 3a & + & 2b & + & 1c & & & = 1 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 10 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

1. Schritt: 2*(*2*) + 3*(*1*) / 8*(*3*) + 1*(*1*) / 8*(*4*) + 3*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & 30 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & -6 \\ 0 & 28 & 2 & 3 & 38 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) - 3*(*2*) / 1*(*4*) - 7*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & -96 \\ 0 & 0 & 30 & -18 & -172 \end{array}$$

3. Schritt: 3*(*4*) - 5*(*3*) /

-8	4	-2	1	|	10
0	4	-4	3	|	30
0	0	18	0	|	-96
0	0	0	-54	|	-36

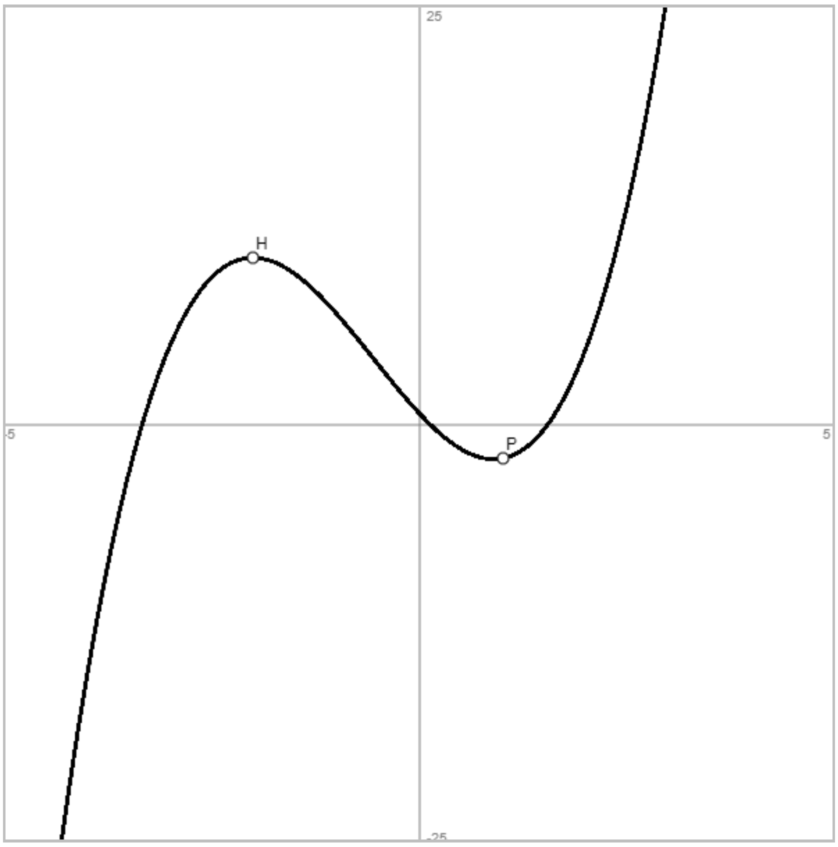
Dreiecksgestalt des Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
-8a + 4b - 2c + 1d &= 10 \\
+4b - 4c + 3d &= 30 \\
+18c &= -96 \\
-54d &= -36
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
d = 0.6666666666666667
c = -5.333333333333333
b = 1.666666666666667
a = 1

III. Funktion: $f(x) = x^3 + 5x^2/3 - 16x/3 + 2/3$

IV. Graph: $f(x) = x^3 + 5x^2/3 - 16x/3 + 2/3$



Aufgabe 16: Gesucht ist der Funktionsterm einer Parabel 4. Grades, deren Kurve durch die Punkte A(-4|485), B(0|5), C(2|5), D(3|44) und E(5|440) verläuft.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; Eigenschaften:
Punkt A(-4|485): f(-4) = 485 -> Gleichung: $a\cdot(-4)^4 + b\cdot(-4)^3 + c\cdot(-4)^2 + d\cdot(-4) + e = 485$
Punkt B(0|5): f(0) = 5 -> Gleichung: $a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e = 5$
Punkt C(2|5): f(2) = 5 -> Gleichung: $a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e = 5$
Punkt D(3|44): f(3) = 44 -> Gleichung: $a\cdot 3^4 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3^2 + d\cdot 3 + e = 44$
Punkt E(5|440): f(5) = 440 -> Gleichung: $a\cdot 5^4 + b\cdot 5^3 + c\cdot 5^2 + d\cdot 5 + e = 440$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
+256a - 64b + 16c - 4d + 1e &= 485 \\
+1e &= 5 \\
+16a + 8b + 4c + 2d + 1e &= 5 \\
+81a + 27b + 9c + 3d + 1e &= 44 \\
+625a + 125b + 25c + 5d + 1e &= 440
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

256	-64	16	-4	1	485
0	0	0	0	1	5
16	8	4	2	1	5
81	27	9	3	1	44
625	125	25	5	1	440

1. Schritt: 16*(3) - 1*(1) / 256*(4) - 81*(1) / 256*(5) - 625*(1) /

256	-64	16	-4	1	485
0	0	0	0	1	5
0	192	48	36	15	-405
0	12096	1008	1092	175	-28021
0	72000	-3600	3780	-369	-190485

Zeilentausch: (2) <-> (3) /

256	-64	16	-4	1	485
0	192	48	36	15	-405
0	0	0	0	1	5
0	12096	1008	1092	175	-28021
0	72000	-3600	3780	-369	-190485

2. Schritt: 1*(4) - 63*(2) / 1*(5) - 375*(2) /

256	-64	16	-4	1	485
0	192	48	36	15	-405
0	0	0	0	1	5
0	0	-2016	-1176	-770	-2506
0	0	-21600	-9720	-5994	-38610

Zeilentausch: (3) <-> (4) /

256	-64	16	-4	1	485
0	192	48	36	15	-405
0	0	-2016	-1176	-770	-2506
0	0	0	0	1	5
0	0	-21600	-9720	-5994	-38610

3. Schritt: -7*(5) + 75*(3) /

256	-64	16	-4	1	485
0	192	48	36	15	-405
0	0	-2016	-1176	-770	-2506
0	0	0	0	1	5
0	0	0	-20160	-15792	82320

Zeilentausch: (4) <-> (5) /

256	-64	16	-4	1	485
0	192	48	36	15	-405
0	0	-2016	-1176	-770	-2506
0	0	0	-20160	-15792	82320
0	0	0	0	1	5

4. Schritt: (keine Umformung) /

256	-64	16	-4	1	485
0	192	48	36	15	-405
0	0	-2016	-1176	-770	-2506
0	0	0	-20160	-15792	82320
0	0	0	0	1	5

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

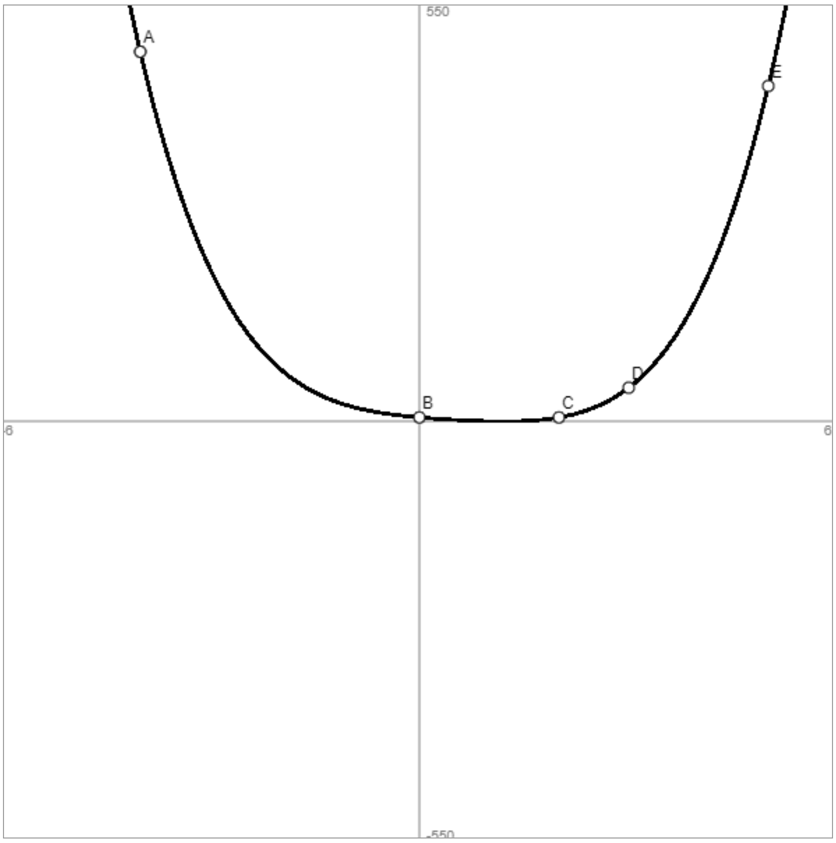
$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} + & 256a & - & 64b & + & 16c & - & 4d & + & 1e & = & 485 \\ & & + & 192b & + & 48c & + & 36d & + & 15e & = & -405 \\ & & & & - & 2016c & - & 1176d & - & 770e & = & -2506 \\ & & & & & & - & 20160d & - & 15792e & = & 82320 \\ & & & & & & & & + & 1e & = & 5 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = 5$
$d = -8$
$c = 4$
$b = -2$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 5$

IV. Graph: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 5$



Aufgabe 17: Gesucht ist der Funktionsterm f(x) einer ganz rationalen Funktion 4. Grades mit den folgenden Eigenschaften: f(x) besitzt die Nullstelle x = 2; der Graph von f(x) hat auf der y-Achse einen Hochpunkt mit y-Wert -14; die Punkte P(-2|-64) und Q(4|314) liegen auf der Kurve der Funktion f(x).

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; Eigenschaften:

Punkt N(2|0) als Nullstelle: f(2) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e = 0$
Punkt H(0|-14): f(0) = -14 -> Gleichung: $a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e = -14$
Punkt H(0|-14) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(0) = 0 -> Gleichung: $4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d = 0$
Punkt P(-2|-64): f(-2) = -64 -> Gleichung: $a\cdot(-2)^4 + b\cdot(-2)^3 + c\cdot(-2)^2 + d\cdot(-2) + e = -64$
Punkt Q(4|314): f(4) = 314 -> Gleichung: $a\cdot 4^4 + b\cdot 4^3 + c\cdot 4^2 + d\cdot 4 + e = 314$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

+	16*a*	+	8*b*	+	4*c*	+	2*d*	+	1*e*	=	0
								+	1*e*	=	-14
						+	1*d*			=	0
+	16*a*	-	8*b*	+	4*c*	-	2*d*	+	1*e*	=	-64
+	256*a*	+	64*b*	+	16*c*	+	4*d*	+	1*e*	=	314

<u>Anfangstableau</u>:

16	8	4	2	1	|	0
0	0	0	0	1	|	-14
0	0	0	1	0	|	0
16	-8	4	-2	1	|	-64
256	64	16	4	1	|	314

<u>1. Schritt</u>: 1*(*4*) - 1*(*1*) / 1*(*5*) - 16*(*1*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	0	0	0	1	|	-14
0	0	0	1	0	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	-64	-48	-28	-15	|	314

<u>Zeilentausch</u>: (*2*) <-> (*4*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	0	0	1	0	|	0
0	0	0	0	1	|	-14
0	-64	-48	-28	-15	|	314

<u>2. Schritt</u>: -1*(*5*) + 4*(*2*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	0	0	1	0	|	0
0	0	0	0	1	|	-14
0	0	48	12	15	|	-570

<u>Zeilentausch</u>: (*3*) <-> (*5*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	0	48	12	15	|	-570
0	0	0	0	1	|	-14
0	0	0	1	0	|	0

<u>3. Schritt</u>: (keine Umformung) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	0	48	12	15	|	-570
0	0	0	0	1	|	-14
0	0	0	1	0	|	0

<u>Zeilentausch</u>: (*4*) <-> (*5*) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	0	48	12	15	|	-570
0	0	0	1	0	|	0
0	0	0	0	1	|	-14

<u>4. Schritt</u>: (keine Umformung) /

16	8	4	2	1	|	0
0	-16	0	-4	0	|	-64
0	0	48	12	15	|	-570
0	0	0	1	0	|	0
0	0	0	0	1	|	-14

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

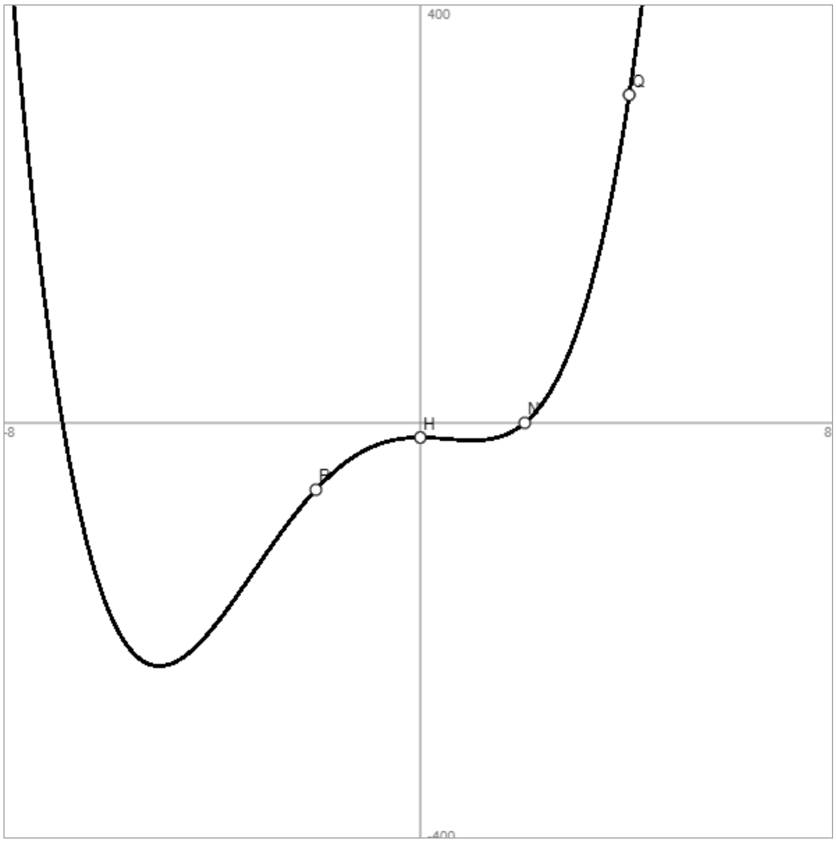
$$\begin{array}{rrrrrcr}
+\ 16a & +\ 8b & +\ 4c & +\ 2d & +\ 1e & = & 0 \\
 & -\ 16b & & -\ 4d & & = & -64 \\
 & & +\ 48c & +\ 12d & +\ 15e & = & -570 \\
 & & & +\ 1d & & = & 0 \\
 & & & & +\ 1e & = & -14
\end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$e = -14$
$d = 0$
$c = -7.5$
$b = 4$
$a = 0.75$

III. <u>Funktion</u>: $f(x) = 0.75x^4 + 4x^3 - 7.5x^2 - 14$

IV. <u>Graph</u>: $f(x) = 0.75x^4 + 4x^3 - 7.5x^2 - 14$



Aufgabe 18: Gesucht ist der Funktionsterm f(x) einer ganz rationalen Funktion 4. Grades mit: f(x) besitzt bei x = -4 eine Nullstelle, bei x = -1 einen Tiefpunkt auf der x-Achse und am Schnittpunkt mit y-Achse die Tangente t: y = -5x – 4.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; Eigenschaften:
Punkt N(-4|0) als Nullstelle: f(-4) = 0 -> Gleichung: $a\cdot(-4)^4 + b\cdot(-4)^3 + c\cdot(-4)^2 + d\cdot(-4) + e = 0$
Punkt H(-1|0) als Nullstelle: f(-1) = 0 -> Gleichung: $a\cdot(-1)^4 + b\cdot(-1)^3 + c\cdot(-1)^2 + d\cdot(-1) + e = 0$
Punkt H(-1|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(-1) = 0 -> Gleichung: $4a\cdot(-1)^3 + 3b\cdot(-1)^2 + 2c\cdot(-1) + d = 0$
Punkt Q(0|-4): f(0) = -4 -> Gleichung: $a\cdot0^4 + b\cdot0^3 + c\cdot0^2 + d\cdot0 + e = -4$
Punkt Q(0|-4): f'(0) = -5 -> Gleichung: $4a\cdot0^3 + 3b\cdot0^2 + 2c\cdot0 + d = -5$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} + & 256a & - & 64b & + & 16c & - & 4d & + & 1e & = & 0 \\ + & 1a & - & 1b & + & 1c & - & 1d & + & 1e & = & 0 \\ - & 4a & + & 3b & - & 2c & + & 1d & & & = & 0 \\ & & & & & & & & + & 1e & = & -4 \\ & & & & & & + & 1d & & & = & -5 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}$$

1. Schritt: 256*(*2*) - 1*(*1*) / 64*(*3*) + 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -192 & 240 & -252 & 255 & 0 \\ 0 & 128 & -112 & 60 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}$$

2. Schritt: 3*(*3*) + 2*(*2*) /

256	-64	16	-4	1	|	0
0	-192	240	-252	255	|	0
0	0	144	-324	513	|	0
0	0	0	0	1	|	-4
0	0	0	1	0	|	-5

3. Schritt: (keine Umformung) /

256	-64	16	-4	1	|	0
0	-192	240	-252	255	|	0
0	0	144	-324	513	|	0
0	0	0	0	1	|	-4
0	0	0	1	0	|	-5

Zeilentausch: (*4*) <-> (*5*) /

256	-64	16	-4	1	|	0
0	-192	240	-252	255	|	0
0	0	144	-324	513	|	0
0	0	0	1	0	|	-5
0	0	0	0	1	|	-4

4. Schritt: (keine Umformung) /

256	-64	16	-4	1	|	0
0	-192	240	-252	255	|	0
0	0	144	-324	513	|	0
0	0	0	1	0	|	-5
0	0	0	0	1	|	-4

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

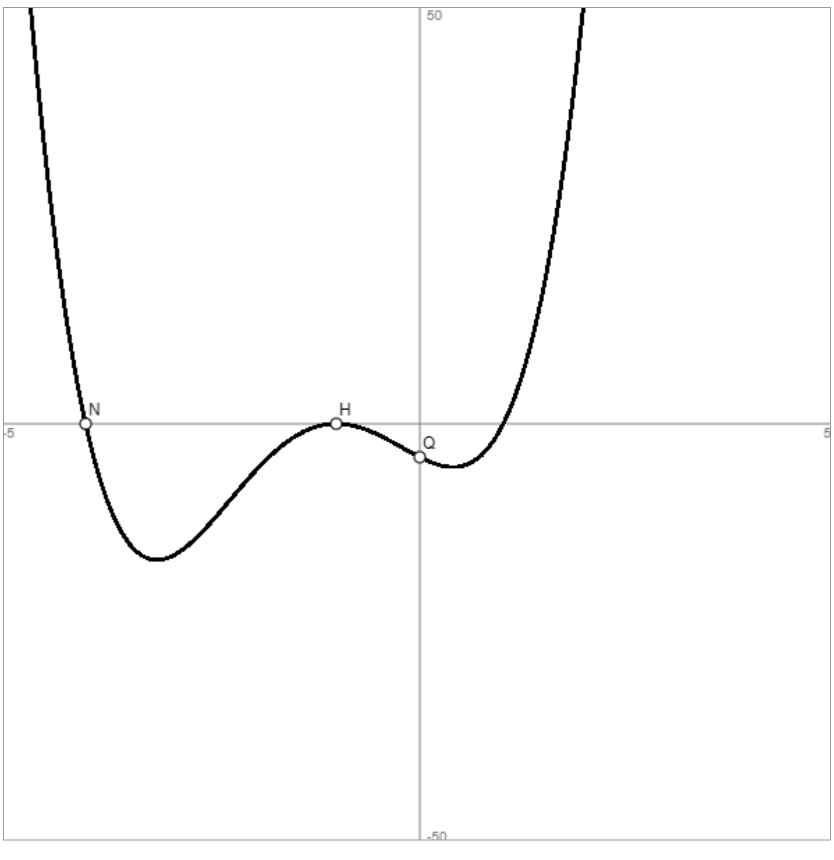
$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
+ & 256a & - & 64b & + & 16c & - & 4d & + & 1e & = & 0 \\
 & & - & 192b & + & 240c & - & 252d & + & 255e & = & 0 \\
 & & & & + & 144c & - & 324d & + & 513e & = & 0 \\
 & & & & & & + & 1d & & & = & -5 \\
 & & & & & & & & + & 1e & = & -4
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = -4$
$d = -5$
$c = 3$
$b = 5$
$a = 1$

III. Funktion: $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4$

IV. Graph: $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4$



Aufgabe 19: Eine ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt die beiden Wendepunkte $W_1(-4|-330)$ und $W_2(1|-2,5)$ schneidet die y-Achse mit der Steigung 16. Bestimme den Funktionsterm.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. und 2. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$; Eigenschaften:

Punkt $W_1(-4|-330)$: $f(-4) = -330$ -> Gleichung: $a\cdot(-4)^4 + b\cdot(-4)^3 + c\cdot(-4)^2 + d\cdot(-4) + e = -330$
Punkt $W_1(-4|-330)$ als Wendepunkt: $f''(-4) = 0$ -> Gleichung: $12a\cdot(-4)^2 + 6b\cdot(-4) + 2c = 0$
Punkt $W_2(1|-2.5)$: $f(1) = -2.5$ -> Gleichung: $a\cdot1^4 + b\cdot1^3 + c\cdot1^2 + d\cdot1 + e = -2.5$
Punkt $W_2(1|-2.5)$ als Wendepunkt: $f''(1) = 0$ -> Gleichung: $12a\cdot1^2 + 6b\cdot1 + 2c = 0$
Stelle x = 0: $f'(0) = 16$ -> Gleichung: $4a\cdot0^3 + 3b\cdot0^2 + 2c\cdot0 + d = 16$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} + & 256a & - & 64b & + & 16c & - & 4d & + & 1e & = -330 \\ + & 192a & - & 24b & + & 2c & & & & & = 0 \\ + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & + & 1e & = -2.5 \\ + & 12a & + & 6b & + & 2c & & & & & = 0 \\ & & & & & & + & 1d & & & = 16 \end{array}$$

Anfangstableau:

256	-64	16	-4	1	|	-330
192	-24	2	0	0	|	0
1	1	1	1	1	|	-2.5
12	6	2	0	0	|	0
0	0	0	1	0	|	16

1. Schritt: 4*(*2*) - 3*(*1*) / 256*(*3*) - 1*(*1*) / 64*(*4*) - 3*(*1*) /

256	-64	16	-4	1	|	-330
0	96	-40	12	-3	|	990
0	320	240	260	255	|	-310
0	576	80	12	-3	|	990
0	0	0	1	0	|	16

2. Schritt: 3*(*3*) - 10*(*2*) / 1*(*4*) - 6*(*2*) /

256	-64	16	-4	1	|	-330
0	96	-40	12	-3	|	990
0	0	1120	660	795	|	-10830
0	0	320	-60	15	|	-4950
0	0	0	1	0	|	16

3. Schritt: 7*(*4*) - 2*(*3*) /

256	-64	16	-4	1	|	-330
0	96	-40	12	-3	|	990
0	0	1120	660	795	|	-10830
0	0	0	-1740	-1485	|	-12990
0	0	0	1	0	|	16

4. Schritt: 1740*(*5*) + 1*(*4*) /

256	-64	16	-4	1	|	-330
0	96	-40	12	-3	|	990
0	0	1120	660	795	|	-10830
0	0	0	-1740	-1485	|	-12990
0	0	0	0	-1485	|	14850

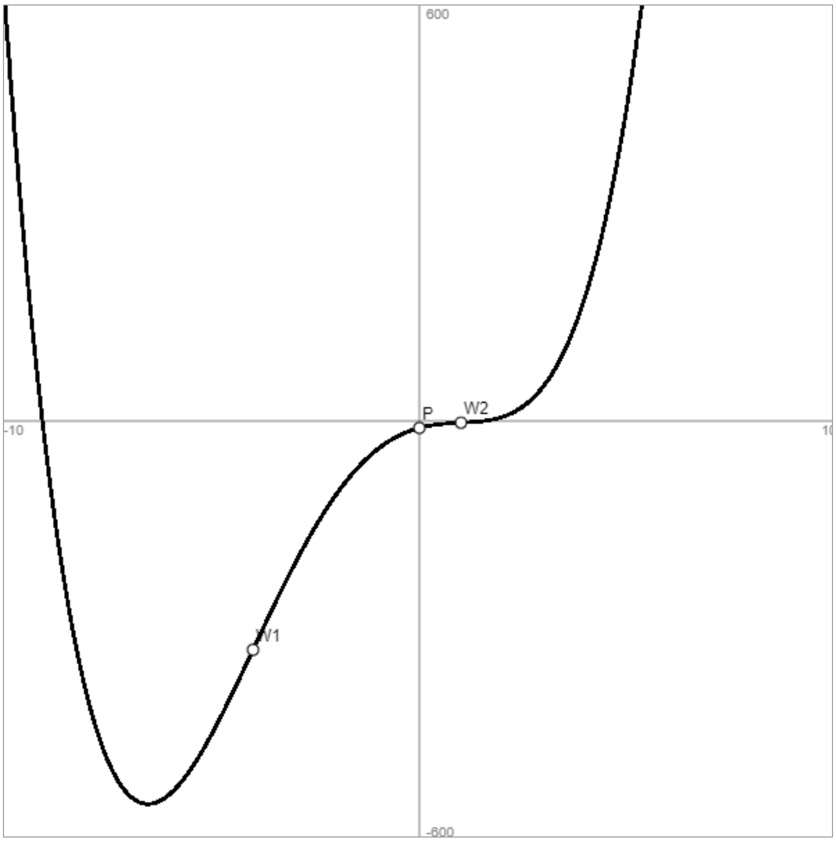
Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} + & 256a & - & 64b & + & 16c & - & 4d & + & 1e & = -330 \\ & & + & 96b & - & 40c & + & 12d & - & 3e & = 990 \\ & & & & + & 1120c & + & 660d & + & 795e & = -10830 \\ & & & & & & - & 1740d & - & 1485e & = -12990 \\ & & & & & & & & - & 1485e & = 14850 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$e = -10$
$d = 16$
$c = -12$
$b = 3$
$a = 0.5$

III. Funktion: $f(x) = 0.5x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 16x - 10$

IV. Graph: $f(x) = 0.5x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 16x - 10$



Aufgabe 20: Eine ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt den Sattelpunkt S(0|1) und den Tiefpunkt T(3|-80). Bestimme den Funktionsterm.

Vorgehensweise: Die Bestimmung des Funktionsterms erfolgt mit dem allgemeinen Ansatz für ganz rationale Funktionen und deren 1. und 2. Ableitung.

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$; Eigenschaften:

Punkt S(0|1): $f(0) = 1$ -> Gleichung: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 1$
Punkt S(0|1) mit waagerechter Tangente: $f'(0) = 0$ -> Gleichung: $4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$
Punkt S(0|1) als Wendepunkt: $f''(0) = 0$ -> Gleichung: $12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$
Punkt T(3|-80): $f(3) = -80$ -> Gleichung: $a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e = -80$
Punkt T(3|-80) als Hoch-/Tiefpunkt: $f'(3) = 0$ -> Gleichung: $4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 + 2c \cdot 3 + d = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

				+ 1*e*	=	1
			+ 1*d*		=	0
		+ 2*c*			=	0
+ 81*a*	+ 27*b*	+ 9*c*	+ 3*d*	+ 1*e*	=	-80
+ 108*a*	+ 27*b*	+ 6*c*	+ 1*d*		=	0

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 108 & 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (*1*) <-> (*4*) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 108 & 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 3*(*5*) - 4*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -27 & -18 & -9 & -4 & 320 \end{array}$$

Zeilentausch: (*2*) <-> (*5*) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & -27 & -18 & -9 & -4 & 320 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & -27 & -18 & -9 & -4 & 320 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

3. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & -27 & -18 & -9 & -4 & 320 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (*4*) <-> (*5*) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & -27 & -18 & -9 & -4 & 320 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

4. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrrrr|r} 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & -80 \\ 0 & -27 & -18 & -9 & -4 & 320 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

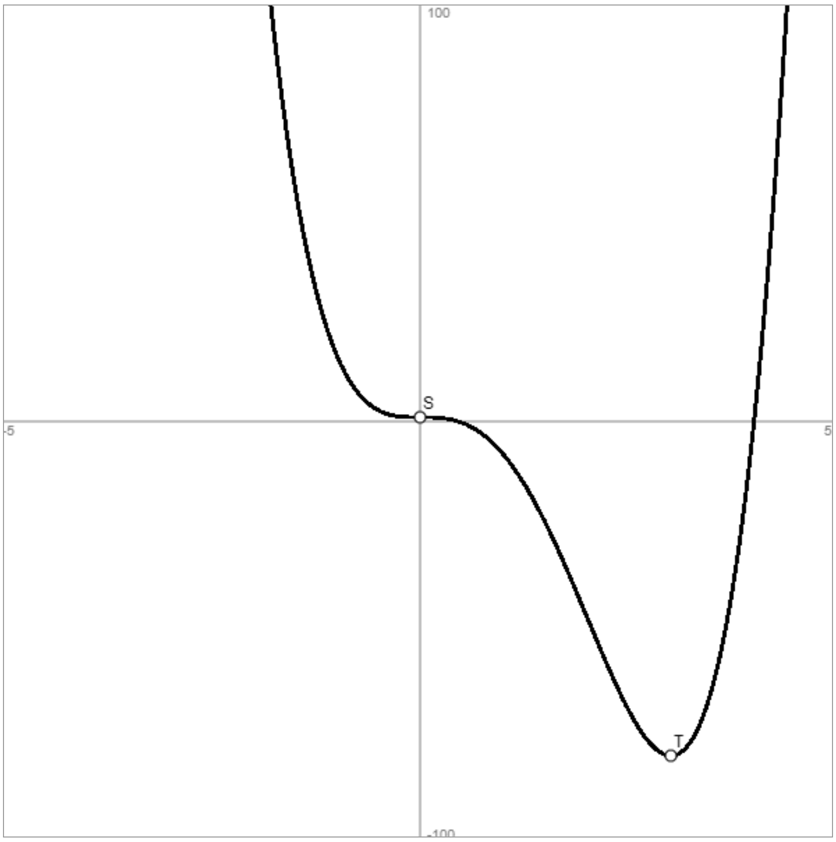
$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} + & 81a & + & 27b & + & 9c & + & 3d & + & 1e & = & -80 \\ & & - & 27b & - & 18c & - & 9d & - & 4e & = & 320 \\ & & & & + & 2c & & & & & = & 0 \\ & & & & & & + & 1d & & & = & 0 \\ & & & & & & & & + & 1e & = & 1 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = 1$
$d = 0$
$c = 0$
$b = -12$
$a = 3$

III. Funktion: $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 1$

IV. Graph: $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 1$



www.michael-buhlmann.de / 07.2020 / Mathematik-Aufgabenpool: Bestimmungsaufgaben III / Aufgaben 1032-1051