Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Exponentialgleichungen (zur Basis e) II

Einleitung: Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variablen umgeformt bzw. aufgelöst werden. Exponentialgleichungen sind innerhalb der mathematischen Algebra Gleichungen mit der Variablen x, die letztlich der Form: $ae^{bx+c} = d$ genügen mit Lösung: $x = \frac{\ln\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b}$. Quadratische Exponentialgleichungen sind von der Form: $ae^{2x} + be^x + c = 0$ und können mit der Substitution $z = e^x$ auf eine quadratische Gleichung: $az^2 + bz + c = 0$ zurückgeführt und damit nach Anwendung von a-b-c- oder p-q-Formel und Rücksubstitution auf einfache Exponentialgleichungen.

Hilfreich für das Lösen von Exponentialgleichungen sind die Potenzgesetze für Potenzen zur Basis e = 2,71828…:

$e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^n \cdot e^m = e^{n+m}$, $\frac{e^n}{e^m} = e^{n-m}$, $\frac{1}{e^n} = e^{-n}$, $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$, $(e^n)^m = e^{n\cdot m}$ (Potenzgesetze),

weiter die Logarithmengesetze der natürlichen Logarithmusfunktion (zur Basis e):

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ (Logarithmengesetze),

schließlich die für die Gleichungsumformung wichtigen Beziehungen:

$e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$ (Funktion und Umkehrfunktion).

Aufgabe 1: Bestimme die Lösungen der folgenden Exponentialgleichungen:

a) $e^x = 19$

b) $e^{2x} = 3$

c) $e^{-x} + 7 = 11$

d) $e^{-3x} = 2e^2$

e) $e^{4-5x} = \frac{1}{e}$

f) $2e^{0,5x} = 12$

g) $4e^{x-2} = 10$

h) $-3e^x + 28 = 13$

i) $2e^{-x} + 8 = 16$

j) $\frac{9}{e^{2x}} = 21$

k) $\frac{3}{e^{4x}} + 14 = 38$

l) $5e^x - 9 = 3e^x + 2$

m) $\frac{9}{2}(e^{0,5x} - 3) + \frac{e^{0,5x}}{4} = 10\frac{1}{4}$

n) $-(e^{-1,5x} + 2) = e^{-1,5x}$

o) $3(e^{-2,5x} + 3) = 12(1 - 2e^{-2,5x})$

p) $e^{-2x+1} + e^{-2x} = e^4$

q) $\frac{1}{2}e^{-2x} + 4x = \frac{1}{2}(10 + 8x - e^{-2x})$

r) $e^{x+1} - e^{x-2} = 1$

s) $\frac{1}{8}e^{2x\ln 4}-30=2$

t) $4e^{-2x}=5e^{3x+1}$

u) $16e^{x}-\frac{4}{e^{3x}}=0$

v) $135e^{x\ln 3}-15e^{-x\ln 3}=0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der Exponentialgleichungen sind die übrigen Terme von den die Unbekannte x enthaltenden e-Potenzen zu trennen, dann ist die Gleichung zu logarithmieren (Verwendung des natürlichen Logarithmus) und endgültig nach x umzustellen.

Lösungen: a) $e^{x}=19 \Leftrightarrow x=\ln 19$

b) $e^{2x}=3 \Leftrightarrow 2x=\ln 3 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 3}{2}=\ln\sqrt{3}$

c) $e^{-x}+7=11 \Leftrightarrow e^{-x}=4 \Leftrightarrow -x=\ln 4 \Leftrightarrow x=-\ln 4=-2\ln 2$

d) $e^{-3x}=2e^{2} \Leftrightarrow -3x=\ln(2e^{2})=\ln 2+\ln(e^{2})=\ln 2+2 \Leftrightarrow x=-\frac{2+\ln 2}{3}$

e) $e^{4-5x}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow 4-5x=\ln(\frac{1}{e})=\ln(e^{-1})=-1 \Leftrightarrow -5x=-5 \Leftrightarrow x=1$

f) $2e^{0,5x}=12 \Leftrightarrow e^{0,5x}=6 \Leftrightarrow 0,5x=\ln 6 \Leftrightarrow x=2\ln 6=\ln 36$

g) $4e^{x-2}=10 \Leftrightarrow e^{x-2}=2,5 \Leftrightarrow x-2=\ln 2,5 \Leftrightarrow x=2+\ln 2,5$

h) $-3e^{x}+28=13 \Leftrightarrow -3e^{x}=-15 \Leftrightarrow e^{x}=5 \Leftrightarrow x=\ln 5$

i) $2e^{-x}+8=16 \Leftrightarrow 2e^{-x}=8 \Leftrightarrow e^{-x}=4 \Leftrightarrow -x=\ln 4 \Leftrightarrow x=-\ln 4=-2\ln 2$

j) $\frac{9}{e^{2x}}=21 \Leftrightarrow 9e^{-2x}=21 \Leftrightarrow e^{-2x}=\frac{7}{3} \Leftrightarrow -2x=\ln(\frac{7}{3}) \Leftrightarrow x=-\frac{\ln(\frac{7}{3})}{2}$

k) $\frac{3}{e^{4x}}+14=38 \Leftrightarrow 3e^{-4x}+14=38 \Leftrightarrow 3e^{-4x}=24 \Leftrightarrow e^{-4x}=8 \Leftrightarrow -4x=\ln 8 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 8}{4}$

l) $5e^{x}-9=3e^{x}+2 \Leftrightarrow 2e^{x}-9=2 \Leftrightarrow 2e^{x}=11 \Leftrightarrow e^{x}=5,5 \Leftrightarrow x=\ln(5,5)$

m) $\frac{9}{2}(e^{0,5x}-3)+\frac{e^{0,5x}}{4}=10\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4,5e^{0,5x}-13,5+0,25e^{0,5x}=10,25 \Leftrightarrow 4,75e^{0,5x}=23,75 \Leftrightarrow e^{0,5x}=5$
$\Leftrightarrow 0,5x=\ln 5 \Leftrightarrow x=2\ln 5=\ln 25$

n) $-(e^{-1,5x}-2)=e^{-1,5x} \Leftrightarrow -e^{-1,5x}+2=e^{-1,5x} \Leftrightarrow 2=2e^{-1,5x} \Leftrightarrow 1=e^{-1,5x} \Leftrightarrow -1,5x=\ln 1=0 \Leftrightarrow x=0$

o) $3(e^{-2,5x}+3)=12(1-2e^{-2,5x}) \Leftrightarrow 3e^{-2,5x}+9=12-24e^{-2,5x} \Leftrightarrow 27e^{-2,5x}+9=12 \Leftrightarrow 27e^{-2,5x}=3$
$\Leftrightarrow e^{-2,5x}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow -2,5x=\ln(\frac{1}{9})=-\ln 9 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 9}{2,5}=\frac{2\ln 9}{5}=\frac{\ln 81}{5}$

p) $e^{-2x+1}+e^{-2x}=e^{4}-1 \Leftrightarrow ee^{-2x}+e^{-2x}=e^{4}-1 \Leftrightarrow (e+1)e^{-2x}=e^{4}-1$
$\Leftrightarrow e^{-2x}=\frac{e^{4}-1}{e+1}=\frac{(e-1)(e+1)(e^{2}+1)}{e-1}=(e+1)(e^{2}+1) \Leftrightarrow -2x=\ln(e+1)(e^{2}+1)$
$\Leftrightarrow -2x=\ln(e+1)+\ln(e^{2}+1) \Leftrightarrow x=-\frac{\ln(e+1)+\ln(e^{2}+1)}{2}$

q) $\frac{1}{2}e^{-2x}+4x=\frac{1}{2}(10+8x-e^{-2x}) \Leftrightarrow 0,5e^{-2x}+4x=5+4x-0,5e^{-2x} \Leftrightarrow 0,5e^{-2x}=5-0,5e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-2x}=5$
$\Leftrightarrow -2x=\ln 5 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 5}{2}=-\ln\sqrt{5}$

r) $e^{x+1}-e^{x-2}=1 \Leftrightarrow ee^{x}-e^{-2}e^{x}=1 \Leftrightarrow e^{x}(e-\frac{1}{e^{2}})=1 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{1-\frac{1}{e^{2}}} \Leftrightarrow x=-\ln\left(1-\frac{1}{e^{2}}\right)$

s) $\frac{1}{8}e^{2x\ln 4}-30=2 \Leftrightarrow \frac{1}{8}e^{2x\ln 4}=32 \Leftrightarrow e^{2x\ln 4}=256 \Leftrightarrow 2x\ln 4=\ln 32 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 32}{2\ln 4}=\frac{5\ln 2}{4\ln 2}=\frac{5}{4}$

t)
$$4e^{-2x}=5e^{3x+1} \Leftrightarrow \frac{4}{5}e^{-2x}=e^{3x+1} \Leftrightarrow \frac{4}{5}=\frac{e^{3x+1}}{e^{-2x}}=e^{5x+1} \Leftrightarrow \ln(\frac{4}{5})=5x+1 \Leftrightarrow \ln(\frac{4}{5})-1=5x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln(\frac{4}{5})-1}{5}=\frac{\ln 4-\ln 5-1}{5}$$

u)
$$16e^{x}-\frac{4}{e^{3x}}=0 \Leftrightarrow 16e^{x}=\frac{4}{e^{3x}} \Leftrightarrow 16e^{x}=4e^{-3x} \Leftrightarrow 4e^{x}=e^{-3x} \Leftrightarrow 4=\frac{e^{-3x}}{e^{x}}=e^{-3x} \Leftrightarrow \ln 4=-3x$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 4}{3}$$

v)
$$135e^{x\ln 3}-15e^{-x\ln 3}=0 \Leftrightarrow 135e^{x\ln 3}=15e^{-x\ln 3} \Leftrightarrow e^{x\ln 3}=\frac{1}{9}e^{-x\ln 3} \Leftrightarrow \frac{e^{x\ln 3}}{e^{-x\ln 3}}=e^{2x\ln 3}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2x\ln 3=\ln(\frac{1}{9})$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln(\frac{1}{9})}{2\ln 3}=\frac{-2\ln 3}{2\ln 3}=-1$$

Aufgabe 2: Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen mit Exponentialanteil:

a) $(x^2-9)e^{4x+1}=0$

b) $(2x+5)(e^{3x}-1)=0$

c) $(5+4x^2)(12-e^{2x+1})=0$

d) $(e^{-x}-e^2)(e^{2x}-\frac{1}{e})=0$

e) $e^{4x}(e^{2x}-4)=0$

f) $(2x^2-8)(e^{0,5x}-1)=0$

g) $(3x+2)(x-3)(4e^{-2x}-12)=0$

h) $(3x^2-15)(2e^{-x}+6)=0$

i) $(2x^3+54)e^{3x-2}=0$

j) $-\frac{7}{3}(2e^{3x}-8)(6e^{-2x}-3)=0$

k) $(x^3-8)(e^{-x-2}-e^4)=0$

l) $(e^{-0,5x}-e)(e^{0,5x}-\sqrt[3]{e^2})=0$

m) $(2e^{3x}-\frac{1}{3})(4e^{2x+1}-2)=0$

n) $(x^2-e^2)(e^{-2x}-e^3)(e^{x+4}-e^4)=0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der Exponentialgleichungen ist der Satz vom Nullprodukt nach eventuellem Umstellen der Gleichung anzuwenden. Bei Exponentialgleichungen mit ganz rationalem Faktor sind ganz rationale (lineare, quadratische, Potenz-) Gleichungen zu lösen.

Lösungen: a) $(x^2-9)e^{4x+1}=0 \underset{:e^{4x+1}}{\Leftrightarrow} x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

b) $(2x+5)(e^{3x}-1)=0 \Leftrightarrow 2x+5=0 \vee e^{3x}-1=0$ mit:
2x+5 = 0 ⇔ 2x = 5 ⇔ x = 2,5
e^{3x}–1 = 0 ⇔ e^{3x} = 1 ⇔ 3x = 0 ⇔ x = 0

c) $(5+4x^2)(12-e^{2x+1})=0 \Leftrightarrow 5+4x^2=0 \vee 12-e^{2x+1}=0$ mit:
5+4x^2 = 0 ⇔ 4x^2 = 5 ⇔ x^2 = -5/4 -> keine Lösung
12–e^{2x+1} = 0 ⇔ 12 = e^{2x+1} ⇔ ln(12) = 2x+1 ⇔ ln(12)–1 = 2x ⇔ x = (ln(12)–1)/2

d) $(e^{-x}-e^2)(e^{2x}-\frac{1}{e})=0 \Leftrightarrow e^{-x}-e^2=0 \vee e^{2x}-\frac{1}{e}=0$ mit:
e^{-x}–e^2 = 0 ⇔ e^{-x} = e^2 ⇔ -x = ln(e^2) = 2 ⇔ x = -2
e^{2x}–e^{-1} = 0 ⇔ e^{2x} = e^{-1} ⇔ 2x = ln(e^{-1}) = -1 ⇔ x = -0,5

e) $e^{4x}(e^{2x}-4)=0 \underset{:e^{4x}}{\Leftrightarrow} e^{2x}-4=0 \Leftrightarrow e^{2x}=4 \Leftrightarrow 2x=\ln 4 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 4}{2}=\ln 2$

f) $(2x^2-8)(e^{0,5x}-1)=0 \Leftrightarrow 2x^2-8=0 \vee e^{0,5x}-1=0$ mit:
2x^2–8 = 0 ⇔ 2x^2 = 8 ⇔ x^2 = 4 ⇔ x = ±2
$e^{0,5x}$–1 = 0 ⇔ $e^{0,5x}$ = 1 ⇔ 0,5x = ln1 = 0 ⇔ x = 0

g) $(3x+2)(x-3)(4e^{-2x}-12)=0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \vee x-3=0 \vee 4e^{-2x}-12=0$ mit:
3x+2 = 0 ⇔ 3x = -2 ⇔ x = -2/3

x–3 = 0 ⇔ x = 3
$4e^{-2x}$–12 = 0 ⇔ $4e^{-2x}$ = 12 ⇔ e^{-2x} = 3 ⇔ -2x = ln3 ⇔ x = -(ln3)/2

h) $(3x^2-15)(2e^{-x}+6)=0 \Leftrightarrow 3x^2-15=0 \vee 2e^{-x}+6=0$ mit:

$3x^2$–15 = 0 ⇔ $3x^2$ = 15 ⇔ x^2 = 5 ⇔ x = ±√5
$2e^{-x}$+6 = 0 ⇔ $2e^{-x}$ = -6 ⇔ e^{-x} = -3 -> keine Lösung

i) $(2x^3+54)e^{3x-2}=0 \underset{:e^{3x-2}}{\Leftrightarrow} 2x^3+54=0 \Leftrightarrow 2x^3=-54 \Leftrightarrow x^3=-27 \Leftrightarrow x=-3$

j) $-\frac{7}{3}(2e^{3x}-8)(6e^{-2x}-3)=0 \Leftrightarrow 2e^{3x}-8=0 \vee 6e^{-2x}-3=0$ mit:

$2e^{3x}$–8=0 ⇔ $2e^{3x}$ = 8 ⇔ e^{3x} = 4 ⇔ 3x = ln4 ⇔ x = (ln4)/3
$6e^{-2x}$–3 = 0 ⇔ $6e^{-2x}$ = 3 ⇔ e^{-2x} = 0,5 ⇔ -2x = ln(0,5) ⇔ x = ln(0,5)/(-2) = (ln2)/2

k) $(x^3-8)(e^{-x-2}-e^4)=0 \Leftrightarrow x^3-8=0 \vee e^{-x-2}-e^4=0$ mit:

x^3–8 = 0 ⇔ x^3 = 8 ⇔ x = 2
e^{-x-2}–e^4 = 0 ⇔ e^{-x-2} = e^4 ⇔ -x-2 = 4 ⇔ -x = 6 ⇔ x = -6

l) $(e^{-0,5x}-e)(e^{0,5x}-\sqrt[3]{e^2})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-0,5x}-e=0 \Leftrightarrow e^{-0,5x}=e \Leftrightarrow -0,5x=1 \Leftrightarrow x=-2 \\ e^{0,5x}-e^{\frac{2}{3}}=0 \Leftrightarrow e^{0,5x}=e^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 0,5x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \end{cases}$

m) $(2e^{3x}-\frac{1}{3})(4e^{2x+1}-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{3x}-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow 2e^{3x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{3x}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow 3x=\ln(\frac{1}{6})=-\ln 6 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 6}{3} \\ 4e^{2x+1}-2=0 \Leftrightarrow 4e^{2x+1}=2 \Leftrightarrow e^{2x+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+1=-\ln 2 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 2+1}{2} \end{cases}$

n) $(x^2-e^2)(e^{-2x}-e^3)(e^{x+4}-e^4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-e^2=0 \Leftrightarrow x^2=e^2 \Leftrightarrow x=-e \vee x=e \\ e^{-2x}-e^3=0 \Leftrightarrow e^{-2x}=e^3 \Leftrightarrow -2x=3 \Leftrightarrow x=-1,5 \\ e^{x+4}-e^4=0 \Leftrightarrow e^{x+4}=e^4 \Leftrightarrow x+4=4 \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$

Aufgabe 3: Bestimme die Lösungen der folgenden Exponentialgleichungen bzw. der folgenden Gleichungen mit Exponentialanteil:

a) $e^{2x}-4e^x=0$

b) $2x^3e^x-8xe^x=0$

c) $x^4-x^4e^x=0$

d) $8x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}x^2=0$

e) $6xe^{0,5x}=24e^{0,5x}$

f) $e^x=8e^{0,2x}$

g) $e^{x+5}-e^{2x}=0$

h) $x=11xe^{2x}$

i) $10xe^{\frac{3}{2}x}-2x^2e^{1,5x}=0$

j) $5e^{4x}-12e^{-x}=0$

k) $e^{3x}-12e^{2x}=0$

l) $\frac{1}{2}e^{-x}-e^{-2x}=0$

m) $8e^{-2x-1}=5e^{2x-1}$

n) $5e^{2x}-\frac{2}{e^{3x}}=0$

Vorgehensweise: Zur Ermittlung der Lösungen der Exponentialgleichungen ist der Satz vom Nullprodukt nach Ausklammern oder gleich die Division durch eine e-Potenz (≠0) anzuwenden. Bei Exponentialgleichungen mit ganz rationalem Faktor sind ganz rationale (lineare, quadratische, Potenz-) Gleichungen zu lösen.

Lösungen: a) $e^{2x}-4e^x=0 \underset{:e^x}{\Leftrightarrow} e^x-4=0 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$

b) $2x^3e^x-8xe^x=0 \underset{:e^x}{\Leftrightarrow} 2x^3-8x=0 \Leftrightarrow x(2x^2-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2-8=0 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

c) $x^4-x^4e^x=0 \Leftrightarrow x^4(1-e^x)=0 \Leftrightarrow x^4=0 \vee 1-e^x=0$ mit:

x^4 = 0 ⇔ x = 0
1–e^x = 0 ⇔ 1 = e^x ⇔ x = ln(1) = 0

d) $8x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}x^2=0 \Leftrightarrow x^2(8e^{-2x}-\frac{1}{2})=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee 8e^{-2x}-\frac{1}{2}=0$ mit:

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$8e^{-2x}-1/2 = 0 \Leftrightarrow 8e^{-2x} = 1/2 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1/16 \Leftrightarrow e^{2x} = 16 \Leftrightarrow e^x = \pm 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$

e) $6xe^{0,5x}=24e^{0,5x} \underset{:e^{0,5x}}{\Leftrightarrow} 6x=24 \Leftrightarrow x=4$

f) $e^x=8e^{0,2x} \underset{:e^{0,2x}}{\Leftrightarrow} e^{0,8x}=8 \Leftrightarrow 0{,}8x=\ln 8 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\ln 8$

g) $e^{x+5}-e^{2x}=0 \underset{:e^x}{\Leftrightarrow} e^5-e^x=0 \Leftrightarrow e^5=e^x \Leftrightarrow x=5$

h) $x=11xe^{2x} \Leftrightarrow x-11xe^{2x}=0 \Leftrightarrow x(1-11e^{2x})=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 1-11e^{2x}=0$ mit:

$x = 0$
$1-11e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = 11e^{2x} \Leftrightarrow 1/11 = e^{2x} \Leftrightarrow 2x = \ln(1/11) = -\ln 11 \Leftrightarrow x = -(\ln 11)/2$

i) $10xe^{\frac{3}{2}x}-2x^2e^{1,5x}=0 \underset{:e^{1,5x}}{\Leftrightarrow} 10x-2x^2=0 \Leftrightarrow x(10-2x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 10-2x=0 \Leftrightarrow 10=2x \Leftrightarrow x=5 \end{cases}$

j) $5e^{4x}-12e^{-x}=0 \underset{:e^{-x}}{\Leftrightarrow} 5e^{5x}-12=0 \Leftrightarrow 5e^{5x}=12 \Leftrightarrow e^{5x}=\frac{12}{5}=2{,}4 \Leftrightarrow 5x=\ln 2{,}4 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2{,}4}{5}$

k) $e^{3x}-12e^{2x}=0 \underset{:e^{2x}}{\Leftrightarrow} e^x-12=0 \Leftrightarrow e^x=12 \Leftrightarrow x=\ln 12$

l) $\frac{1}{2}e^{-x}-e^{-2x}=0 \underset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}-e^{-x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{-x} \Leftrightarrow -x=\ln(\frac{1}{2})=-\ln 2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

m) $8e^{-2x-1}=5e^{2x-1} \underset{\cdot e^{2x+1}}{\Leftrightarrow} 8=5e^{4x} \Leftrightarrow e^{4x}=\frac{8}{5}=1{,}6 \Leftrightarrow 4x=\ln(1{,}6) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(1{,}6)}{4}$

n) $5e^{2x}-\frac{2}{e^{3x}}=0 \underset{\cdot e^{3x}}{\Leftrightarrow} 5e^{5x}-2=0 \Leftrightarrow 5e^{5x}=2 \Leftrightarrow e^{5x}=\frac{2}{5}=0{,}4 \Leftrightarrow 5x=\ln(0{,}4) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(0{,}4)}{5}$

Aufgabe 4: Bestimme die Lösungen der folgenden Exponentialgleichungen:

a) $e^{2x}+6e^x-7=0$

b) $3e^{2x}-17e^x+10=0$

c) $e^{2x}+e^x-12=0$

d) $e^{3x}-12e^{2x}+32e^x=0$

e) $5e^{2x}=2e^x+3$

f) $e^{4x}+e^{2x}=72$

g) $12e^x-\frac{9}{e^x}=33$

h) $e^x+99e^{-x}-20=0$

i) $\frac{10}{e^{2x}}+\frac{3}{e^x}-46=0$

j) $e^x=\frac{3}{e^x}+\frac{1}{2}$

k) $4xe^{2x}+9x=37xe^x$

l) $(2x^2-8)(e^{2x}-13e^x+12)=0$

m) $(e^{2x-1}-5)(e^{4x+2}-44e^{2x+1}+480)=0$

n) $(\frac{5}{e^{3x+2}}-10)(e^{3x}-3e^{-3x}+2)=0$

Vorgehensweise: Es liegen gemischt quadratischen Gleichungen in e^x, e^{2x} o.ä. vor. Substitution mit $z=e^x$, $z=e^{2x}$ o.ä. ergibt eine gemischt quadratischen Gleichung in z, für die a-b-c- oder p-q-Formel anzuwenden ist. Rücksubstitution $e^x=z$, $e^{2x}=z$ o.ä. führt auf einfache Exponentialgleichungen, die durch Logarithmieren zu lösen sind.

Lösungen: a) $e^{2x}+6e^x-7=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2+6z-7=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=-3\pm\sqrt{3^2+7}=-3\pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=1 \Leftrightarrow x=0 \\ z=-7 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=-7 -> k.L. \end{cases}$

$3e^{2x}-17e^x+10=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} 3z^2-17z+10=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 3\cdot 10}}{2\cdot 3}=\frac{17\pm\sqrt{169}}{6}=\frac{17\pm 13}{6} \Leftrightarrow$

b) $\begin{cases} z=\frac{30}{6}=5 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5 \\ z=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\ln(\frac{2}{3}) \end{cases}$

c)
$$e^{2x}+e^x-12=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2+z-12=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} z=3 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln3 \\ z=-4 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=-4->k.L. \end{cases}$$

d)
$$e^{3x}-12e^{2x}+32e^x=0 \Leftrightarrow e^{2x}-12e^x+32=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2-12z+32=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot1\cdot32}}{2\cdot1}=$$
$$\frac{12\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{12\pm4}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} z=8 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=8 \Leftrightarrow x=\ln8 \\ \quad z=e^x \\ z=4 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln4 \end{cases}$$

e) $5e^{2x}=2e^x+3 \Leftrightarrow 5e^{2x}-2e^x-3=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} 5z^2-2z-3=0 \Leftrightarrow$

f)
$$e^{4x}+e^{2x}=72 \Leftrightarrow e^{4x}+e^{2x}-72=0 \underset{z=e^{2x}}{\Leftrightarrow} z^2+z-72=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-72)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{289}}{2}=$$
$$\frac{-1\pm17}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} z=16 \underset{e^{2x}=z}{\Leftrightarrow} e^{2x}=16 \Leftrightarrow 2x=\ln16 \Leftrightarrow x=\frac{\ln16}{2}=\ln4 \\ z=-9 \underset{e^{2x}=z}{\Leftrightarrow} e^{2x}=-9->k.L. \end{cases}$$

g)
$$12e^x-\frac{9}{e^x}=33 \Leftrightarrow 12e^{2x}-9=33e^x \Leftrightarrow 12e^{2x}-33e^x-9=0 \Leftrightarrow e^{2x}-11e^x-3=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} 4z^2-11z-3=0 \Leftrightarrow$$
$$z_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot4\cdot(-3)}}{2\cdot4}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{11\pm13}{8}\Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \Leftrightarrow e^x=3 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} x=\ln3 \\ z=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow e^x=-\frac{1}{4}->k.L. \end{cases}$$

h)
$$e^x+99e^{-x}-20=0 \Leftrightarrow e^{2x}+99-20e^x=0 \Leftrightarrow e^{2x}-20e^x+99=0 \underset{z=e^{2x}}{\Leftrightarrow} z^2-20z+99=0 \Leftrightarrow$$
$$z_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{20^2-4\cdot1\cdot99}}{2\cdot1}=\frac{20\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{20\pm2}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} z=11 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=11 \Leftrightarrow x=\ln11 \\ \quad e^x=z \\ z=9 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=9 \Leftrightarrow x=\ln9 \end{cases}$$

i)
$$\frac{10}{e^{2x}}+\frac{3}{e^x}-46=0 \Leftrightarrow 10e^{-2x}+3e^{-x}-46=0 \underset{z=e^{-x}}{\Leftrightarrow} 10z^2+3z-46=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot10\cdot(-46)}}{2\cdot10}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{1849}}{20}=\frac{-3\pm43}{20}\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \underset{e^{-x}=z}{\Leftrightarrow} e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln2 \Leftrightarrow x=-\ln2 \\ z=-2{,}3 \underset{e^{-x}=z}{\Leftrightarrow} e^{-x}=-2{,}3->k.L. \end{cases}$$

j)
$$e^x=\frac{3}{e^x}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2e^{2x}=6+e^x \Leftrightarrow 2e^{2x}-e^x-6=0 \underset{z=e^{2x}}{\Leftrightarrow} 2z^2-z-6=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}=$$
$$\frac{1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{1\pm7}{4}\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln2 \\ z=-1{,}5 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=-1{,}5->k.L. \end{cases}$$

k) $4xe^{2x}+9x=37xe^x \Leftrightarrow 4xe^{2x}-37xe^x+9x=0 \Leftrightarrow x(4e^{2x}-37e^x+9)=0 \Leftrightarrow$
$x=0\vee 4e^{2x}-37e^x+9=0$ mit:
x= 0
$$4e^{2x}-37e^x+9=0 \underset{z=e^{-x}}{\Leftrightarrow} 4z^2-37z+9=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{37\pm\sqrt{37^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{8}=\frac{37\pm35}{8}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} z=9 \Leftrightarrow e^x=9 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} x=\ln9 \\ z=\frac{1}{4} \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\ln(\frac{1}{4})=-\ln4 \end{cases}$$

l) $(2x^2-8)(e^{2x}-13e^x+12)=0 \Leftrightarrow 2x^2-8=0 \vee e^{2x}-13e^x+12=0$ mit:

$2x^2 – 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$

$$e^{2x} - 13e^x + 12 = 0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2 - 13z + 12 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}5^2 - 12} = 6{,}5 \pm \sqrt{30{,}25} = 6{,}5 \pm 5{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 12 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = 12 \Leftrightarrow x = \ln 12 \\ z = 1 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0 \end{cases}$$

m) $(e^{2x-1} - 5)(e^{4x+2} - 44e^{2x+1} + 480) = 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} - 5 = 0 \vee e^{4x+2} - 44e^{2x+1} + 480 = 0$ mit:

$$e^{2x-1} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln 5 \Leftrightarrow 2x = \ln 5 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5 + 1}{2}$$

$$e^{4x+2} - 44e^{2x+1} + 480 = 0 \underset{z=e^{2x+1}}{\Leftrightarrow} z^2 - 44z + 480 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{44 \pm \sqrt{44^2 - 4 \cdot 1 \cdot 480}}{2 \cdot 1} = \frac{44 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{44 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 24 \underset{e^{2y+1}=z}{\Leftrightarrow} e^{2x+1} = 24 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln 24 \Leftrightarrow 2x = \ln 24 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 24 - 1}{2} \\ z = 20 \underset{e^{2y+1}=z}{\Leftrightarrow} e^{2x+1} = 20 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln 20 \Leftrightarrow 2x = \ln 20 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 20 - 1}{2} \end{cases}$$

n) $(\frac{5}{e^{3x+2}} - 10)(e^{3x} - 3e^{-3x} + 2) = 0 \Leftrightarrow 5e^{-3x-2} - 10 = 0 \vee e^{3x} - 3e^{-3x} + 2 = 0$ mit:

$$5e^{-3x-2} - 10 = 0 \Leftrightarrow 5e^{-3x-2} = 10 \Leftrightarrow e^{-3x-2} = 2 \Leftrightarrow -3x - 2 = \ln 2 \Leftrightarrow -3x = 2 + \ln 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2 + \ln 2}{3}$$

$$e^{3x} - 3e^{-3x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{6x} - 3 + 2e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^{6x} + 2e^{3x} - 3 = 0 \underset{z=e^{3x}}{\Leftrightarrow} z^2 + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} =$$

$$-1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \underset{\hat{e}^{3x}=z}{\Leftrightarrow} \hat{e}^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ z = -3 \underset{\hat{e}^{3x}=z}{\Leftrightarrow} \hat{e}^{3x} = -3 -> k.L. \end{cases}$$

Aufgabe 5: Löse die folgenden Exponentialgleichungen:

a) $e^x = 119$

b) $e^{x-7} = 5$

c) $e^{-2x} - 7 = 0$

d) $e^{5-3x} = 5$

e) $e^{5x+8} = 1$

f) $e^{2x} + 19 = 78$

g) $2e^{0,5x} - 9 = 11$

h) $\frac{2}{3}(e^{-x+1} + 15) = \frac{3}{4}(e^{-x+1} + 12)$

i) $7e^x - 4e^x = 23 + e^x$

j) $\left(3e^{-2x} - 1\right)^3 = 125$

k) $3e^{x+2} - 5 = 2e^{x+1} + 10$

l) $2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x = 0$

m) $3xe^{3x+1} = 5xe^{x-2}$

n) $(2x^2 + 1)(e^{0,5x+2} - e^{x+1}) = 0$

o) $x^2e^{-2x} - 4x^2 = 0$

p) $e^{2x} = 9(e^x + 2)$

q) $4e^{-4x} + 5e^{-2x} - 9 = 0$

r) $3e^x = \frac{8}{e^x} + 10$

s) $\frac{100}{e^{2x}} - \frac{5}{e^x} = 3$

t) $\frac{e^{4x} - 13e^{2x} + 36}{x^2} = 0$

u) $\frac{e^{2x} - 3}{2 - 4e^x} = 1$

v) $(\frac{1}{16}x^5 - 2)(e^{2x} - \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{8}) = 0$

w) $(3e^{0,5x+2} - 4)(2e^{2x} + e^x - 1) = 0$

x) $(2x^4 - 26x^2 + 72)(6e^{5x} - 30e^{4x} + 36e^{3x}) = 0$

y) $e^{3x}+(2e-e^3)e^{2x}-2e^{x+4}=0$

z) $(e^{3x+1}-e^3)(e^{2x}-(1+e)e^{x+1}+e^3)=0$

Vorgehensweise: Es gelten die in den vorstehenden Aufgaben geschilderten Vorgehensweisen.

Lösungen: a) $e^x=119 \Leftrightarrow x=\ln 119$

b) $e^{x-7}=5 \Leftrightarrow x-7=\ln 5 \Leftrightarrow x=7+\ln 5$

c) $e^{-2x}-7=0 \Leftrightarrow e^{-2x}=7 \Leftrightarrow -2x=\ln 7 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 7}{2}=-\ln\sqrt{7}$

d) $e^{5-3x}=5 \Leftrightarrow 5-3x=\ln 5 \Leftrightarrow -3x=\ln 5-5 \Leftrightarrow x=\frac{5-\ln 5}{3}$

e) $e^{5x+8}=1 \Leftrightarrow 5x+8=\ln 1=0 \Leftrightarrow 5x=-8 \Leftrightarrow x=-1{,}6$

f) $e^{2x}+19=78 \Leftrightarrow e^{2x}=59 \Leftrightarrow 2x=\ln 59 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 59}{2}=\ln\sqrt{59}$

g) $2e^{0{,}5x}-9=11 \Leftrightarrow 2e^{0{,}5x}=20 \Leftrightarrow e^{0{,}5x}=10 \Leftrightarrow 0{,}5x=\ln 10 \Leftrightarrow x=2\ln 10=\ln 100$

h) $\frac{2}{3}(e^{-x+1}+15)=\frac{3}{4}(e^{-x+1}+12) \underset{\cdot 12}{\Leftrightarrow} 8(e^{-x+1}+15)=9(e^{-x+1}+12) \Leftrightarrow 8e^{-x+1}+120=9e^{-x+1}+108$

$\Leftrightarrow 120=e^{-x+1}+108 \Leftrightarrow 12=e^{-x+1} \Leftrightarrow \ln 12=-x+1 \Leftrightarrow \ln 12-1=-x \Leftrightarrow x=1-\ln 12$

i) $7e^x-4e^x=23+e^x \Leftrightarrow 3e^x=23+e^x \Leftrightarrow 2e^x=23 \Leftrightarrow e^x=11{,}5 \Leftrightarrow x=\ln 11{,}5$

j) $\left(3e^{-2x}-1\right)^3=125 \Leftrightarrow 3e^{-2x}-1=5 \Leftrightarrow 3e^{-2x}=6 \Leftrightarrow e^{-2x}=2 \Leftrightarrow -2x=\ln 2 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 2}{2}$

k) $3e^{x+2}-5=2e^{x+1}+10 \Leftrightarrow 3e^{x+2}-2e^{x+1}=15 \Leftrightarrow 3e^2e^x-2ee^x=15 \Leftrightarrow (3e^2-2e)e^x=15 \Leftrightarrow$

$e^x=\frac{15}{3e^2-2e} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{15}{3e^2-2e}\right)$

l) $2e^{2x}-\frac{1}{2}e^x=0 \underset{:e^x}{\Leftrightarrow} 2e^x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\ln(\frac{1}{4})=-\ln 4$

m) $3xe^{3x+1}=5xe^{x-2} \Leftrightarrow 3xe^{3x+1}-5xe^{x-2}=0 \Leftrightarrow x(3e^{3x+1}-5e^{x-2})=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 3e^{3x+1}-5e^{x-2}=0$ mit:

x = 0

$3e^{3x+1}-5e^{x-2}=0 \Leftrightarrow 3e^{3x+1}=5e^{x-2} \Leftrightarrow e^{2x+3}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2x+3=\ln(\frac{5}{3}) \Leftrightarrow 2x=\ln(\frac{5}{3})-3 \Leftrightarrow x=\frac{\ln(\frac{5}{3})-3}{2}$

n) $(2x^2+1)(e^{0{,}5x+2}-e^{x+1})=0 \Leftrightarrow 2x^2+1=0 \vee e^{0{,}5x+2}-e^{x+1}=0$ mit:

$2x^2+1=0 \Leftrightarrow 2x^2=-1 \Leftrightarrow x^2=-0{,}5$ -> k.L.

$e^{0{,}5x+2}-e^{x+1}=0 \Leftrightarrow e^{0{,}5x+2}=e^{x+1} \Leftrightarrow e^{-0{,}5x+1}=1 \Leftrightarrow -0{,}5x+1=\ln 1=0 \Leftrightarrow -0{,}5x=-1 \Leftrightarrow x=2$

o) $x^2e^{-2x}-4x^2=0 \Leftrightarrow x^2(e^{-2x}-4)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee e^{-2x}-4=0$ mit:

$x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$e^{-2x}-4=0 \Leftrightarrow e^{-2x}=4 \Leftrightarrow -2x=\ln 4 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 4}{2}=-\ln 2$

p) $e^{2x}=9(e^x+2) \Leftrightarrow e^{2x}=9e^x+18 \Leftrightarrow e^{2x}-9e^x-18=0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2-9z+18=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=4{,}5\pm\sqrt{4{,}5^2-18}=$

$4{,}5\pm\sqrt{2{,}25}=4{,}5\pm 1{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} z=6 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=6 \Leftrightarrow x=\ln 6 \\ z=3 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3 \end{cases}$

q) $4e^{-4x}+5e^{-2x}-9=0 \underset{z=e^{-2x}}{\Leftrightarrow} 4z^2+5z-9=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 4\cdot(-9)}}{2\cdot 4}=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{-5\pm 13}{8} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} z=1 \underset{e^{-2x}=z}{\Leftrightarrow} e^{-2x}=1 \Leftrightarrow -2x=\ln 1=0 \Leftrightarrow x=0 \\ z=-2{,}25 \underset{e^{-2x}=z}{\Leftrightarrow} e^{-2x}=-2{,}25 -> k.L. \end{cases}$

r) $3e^{x}=\frac{8}{e^{x}}+10\underset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow}3e^{2x}=8+10e^{x}\Leftrightarrow 3e^{2x}-10e^{x}-8=0\underset{z=e^{x}}{\Leftrightarrow}3z^{2}-10z-8=0\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^{2}-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}=$

$\frac{10\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{10\pm 14}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}z=4\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=4\Leftrightarrow x=\ln 4\\ z=-\frac{2}{3}\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=-\frac{2}{3}->k.L.\end{cases}$

s) $\frac{100}{e^{2x}}-\frac{5}{e^{x}}=3\underset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow}100-5e^{x}=3e^{2x}\Leftrightarrow 0=3e^{2x}+5e^{x}-100\underset{z=e^{x}}{\Leftrightarrow}0=3z^{2}+5z-100\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^{2}-4\cdot 3\cdot(-100)}}{2\cdot 3}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{1225}}{6}=\frac{-5\pm 35}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}z=5\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=5\Leftrightarrow x=\ln 5\\ z=-\frac{20}{3}\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=-\frac{20}{3}->k.L.\end{cases}$

t) $\frac{e^{4x}-13e^{2x}+36}{x^{2}}=0\Leftrightarrow e^{4x}-13e^{2x}+36=0\underset{z=e^{2x}}{\Leftrightarrow}z^{2}-13z+36=0\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{13^{2}-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}$

$=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}z=9\underset{e^{2x}=z}{\Leftrightarrow}e^{2x}=9\Leftrightarrow 2x=\ln 9\Leftrightarrow x=\frac{\ln 9}{2}=\ln 3\\ z=4\underset{e^{2x}=z}{\Leftrightarrow}e^{2x}=4\Leftrightarrow 2x=\ln 4\Leftrightarrow x=\frac{\ln 4}{2}=\ln 2\end{cases}$

u) $\frac{e^{2x}-3}{2-4e^{x}}=1\Leftrightarrow e^{2x}-3=2-4e^{x}\Leftrightarrow e^{2x}+4e^{x}-5=0\underset{z=e^{x}}{\Leftrightarrow}z^{2}+4z-5=0\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^{2}-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=1\Leftrightarrow x=\ln 1=0\\ z=-5\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=-5->k.L.\end{cases}$

v) $(\frac{1}{16}x^{5}-2)(e^{2x}-\frac{3}{4}e^{x}+\frac{1}{8})=0\Leftrightarrow\frac{1}{16}x^{5}-2=0\vee e^{2x}-\frac{3}{4}e^{x}+\frac{1}{8}=0$ mit:

$\frac{1}{16}x^{5}-2=0\Leftrightarrow\frac{1}{16}x^{5}=2\Leftrightarrow x^{5}=32\Leftrightarrow x=2$

$e^{2x}-\frac{3}{4}e^{x}+\frac{1}{8}=0\underset{z=e^{x}}{\Leftrightarrow}z^{2}-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^{2}-\frac{1}{8}}=\frac{3}{8}\pm\frac{1}{8}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}z=\frac{1}{2}\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln(\frac{1}{2})=-\ln 2\\ z=\frac{1}{4}\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\ln(\frac{1}{4})=-\ln 4\end{cases}$

w) $(3e^{0,5x+2}-4)(2e^{2x}+e^{x}-1)=0\Leftrightarrow 3e^{0,5x+2}-4=0\vee 2e^{2x}+e^{x}-1=0$ mit:

$3e^{0,5x+2}-4=0\Leftrightarrow 3e^{0,5x+2}=4\Leftrightarrow e^{0,5x+2}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 0,5x+2=\ln(\frac{4}{3})\Leftrightarrow 0,5x=\ln(\frac{4}{3})-2\Leftrightarrow x=2\ln(\frac{4}{3})-4$

$2e^{2x}+e^{x}-1=0\underset{z=e^{x}}{\Leftrightarrow}2z^{2}+2z-1=0\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^{2}-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}z=-1\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=-1->k.L.\\ z=\frac{1}{2}\underset{e^{x}=z}{\Leftrightarrow}e^{x}=\frac{1}{2}=x=\ln(\frac{1}{2})=-\ln 2\end{cases}$

x) $(2x^{4}-26x^{2}+72)(6e^{5x}-30e^{4x}+36e^{3x})=0\Leftrightarrow 2x^{4}-26x^{2}+72=0\vee 6e^{5x}-30e^{4x}+36e^{3x}=0$ mit:

$2x^{4}-26x^{2}+72=0\underset{z=x^{2}}{\Leftrightarrow}2z^{2}-26z+72=0\Leftrightarrow z^{2}-13z+36=0\Leftrightarrow z_{1,2}=6,5\pm\sqrt{6,5^{2}-36}=6,5\pm\sqrt{6,25}=6,5\pm 2,5\Leftrightarrow$

$\begin{cases}z=9\underset{x^{2}=z}{\Leftrightarrow}x^{2}=9\Leftrightarrow x=\pm 3\\ z=4\underset{x^{2}=z}{\Leftrightarrow}x^{2}=4\Leftrightarrow x=\pm 2\end{cases}$

$6e^{5x}-30e^{4x}+36e^{3x}=0\underset{:e^{3x}}{\Leftrightarrow}6e^{2x}-30e^{x}+36=0\Leftrightarrow e^{2x}-5e^{x}+6=0\underset{z=e^{x}}{\Leftrightarrow}z^{2}-5z+6=0\Leftrightarrow$

$$z_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 6} = 2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 2{,}5 \pm 0{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 \\ z = 2 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$

$$e^{3x} + (2e - e^3)e^{2x} - 2e^{x+4} = 0 \underset{:e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} + (2e - e^3)e^x - 2e^4 = 0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2 + (2e - e^3)z - 2e^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{-(2e - e^3) \pm \sqrt{(2e - e^3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2e^4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2e + e^3 \pm \sqrt{4e^2 - 4e^4 + e^6 + 8e^4}}{2}$$

y) $$= \frac{-2e + e^3 \pm \sqrt{4e^2 + 4e^4 + e^6}}{2} = \frac{-2e + e^3 \pm \sqrt{(2e + e^3)^2}}{2} = \frac{-2e + e^3 \pm (2e + e^3)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = e^3 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = e^3 \Leftrightarrow x = \ln(e^3) = 3 \\ z = -2e \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = -2e -> k.L. \end{cases}$$

z) $(e^{3x+1} - e^3)(e^{2x} - (1+e)e^{x+1} + e^3) = 0 \Leftrightarrow e^{3x+1} - e^3 = 0 \vee e^{2x} - (1+e)e^{x+1} + e^3 = 0$ mit:

$$e^{3x+1} - e^3 = 0 \Leftrightarrow e^{3x+1} = e^3 \Leftrightarrow e^{3x} = e^2 \Leftrightarrow 3x = \ln(e^2) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$e^{2x} - (1+e)e^{x+1} + e^3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (e + e^2)e^x + e^3 = 0 \underset{z=e^x}{\Leftrightarrow} z^2 - (e + e^2)z + e^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{e + e^2 \pm \sqrt{(e + e^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot e^3}}{2 \cdot 1} = \frac{e + e^2 \pm \sqrt{e^2 + 2e^3 + e^4 - 4e^3}}{2} = \frac{e + e^2 \pm \sqrt{e^2 - 2e^3 + e^4}}{2}$$

$$= \frac{e + e^2 \pm \sqrt{(e - e^2)^2}}{2} = \frac{e + e^2 \pm (e - e^2)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z = e \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = e \Leftrightarrow x = \ln e = 1 \\ z = e^2 \underset{e^x=z}{\Leftrightarrow} e^x = e^2 \Leftrightarrow x = \ln(e^2) = 2 \end{cases}$$

Abkürzung: k.L. = keine Lösung.

www.michael-buhlmann.de / 01.2019 / Mathematik-Aufgabenpool: Exponentialgleichungen II / Aufgaben 721-725