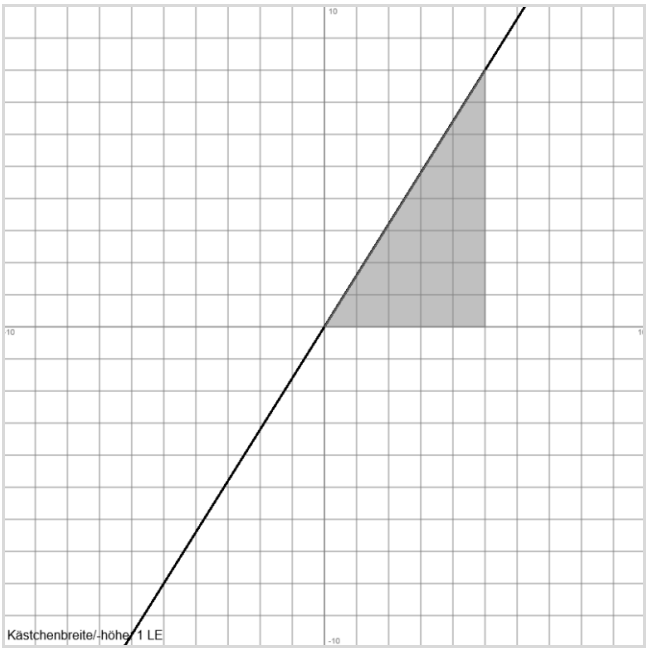
Michael Buhlmann

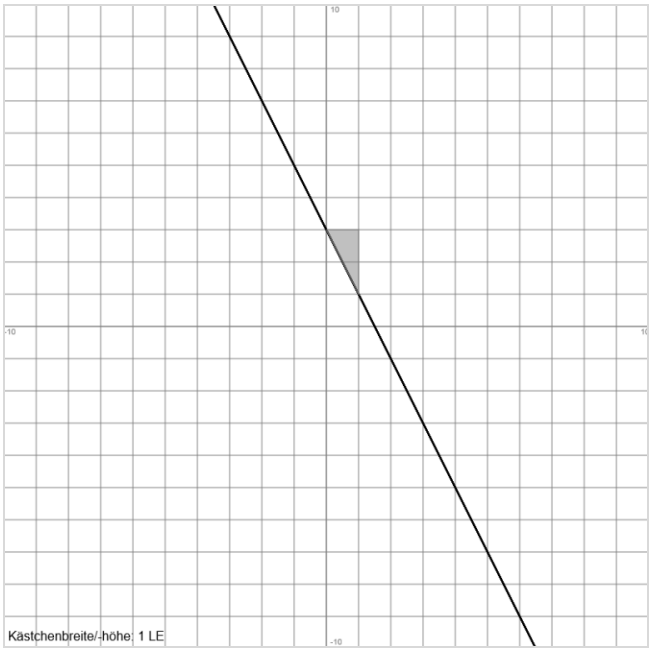
Mathematik-Aufgabenpool
> Geraden I (Graphen)

Einleitung: Geraden sind (als lineare Funktionen) von der Form: y = mx + b mit Geradensteigung m und y-Achsenabschnitt b mit m, b als reelle Zahlen (Funktionsgleichung, Geradenterm). Geraden besitzen (bei x=0) den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|b)$ und (bei m≠0, y=0) die Nullstelle N(-b/m|0) als Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Das Zeichnen von Geraden y = mx + b in ein x-y-Koordinatensystem erfolgt über den y-Achsenabschnitt b durch Eintragen des y-Achsenabschnittspunkts $S_y(0|b)$ auf der y-Achse, danach über die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks durch Eintragen eines zweiten Geradenpunktes P(q|p+b), wenn die Steigung m als Bruch der Form m = p/q mit ganzzahligen p, q bei q>0 dargestellt und vom y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|b)$ das Steigungsdreieck q Längeneinheiten nach rechts und p Längeneinheiten nach oben (p>0) bzw. nach unten (p<0) ermittelt werden kann; durch die (zeichnerisch zu verbindenden) zwei Punkte $S_y(0|b)$ und P(q|p+b) verläuft genau eine Gerade. Umgekehrt kann aus der Zeichnung einer Geraden (Graph) über Steigungsdreieck und y-Achsenabschnitt die Funktionsgleichung (Geradengleichung) ermittelt werden.
Darüber hinaus kann aus zwei (beliebigen, zeichnerisch zu verbindenden) Punkten $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ eine Gerade in ein x-y-Koordinatensystem gezeichnet werden. Die Geradengleichung bestimmt sich mit dem Differenzenquotienten $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ gemäß der Zweipunkteform: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ als: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$. Aus der Punktsteigungsform $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ folgt: $y = m(x - x_1) + y_1$.

Geraden y = mx heißen Ursprungsgeraden und verlaufen durch den Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems. Die Ursprungsgerade y = x ist die 1. Winkelhalbierende, die Ursprungsgerade y = -x die 2. Winkelhalbierende.



y = $\frac{8}{5}$**x**: Ursprungsgerade, Steigungsdreieck



y = -2x+3: Gerade

Aufgabe 1: Zeichne die Ursprungsgerade y = mx.

a) y = 3x

b) y = -x

c) y = $-\frac{2}{5}$x

d) y = $\frac{1}{6}$x

e) y = 0,5x

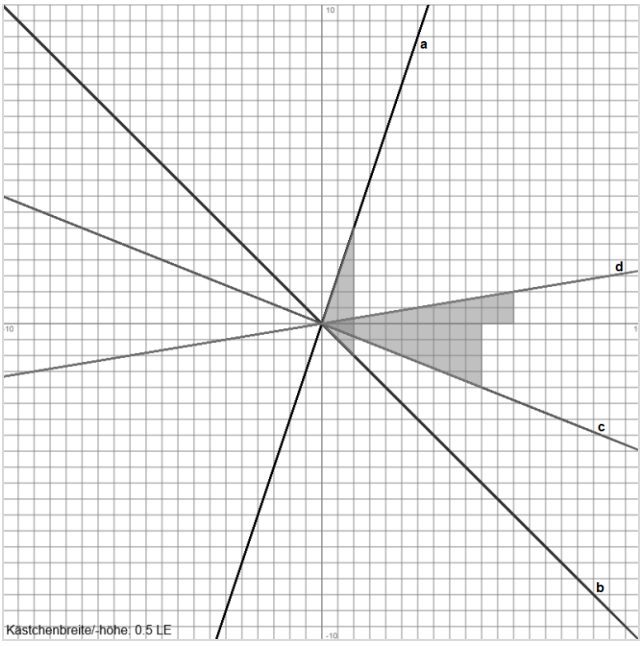
f) y = -2x

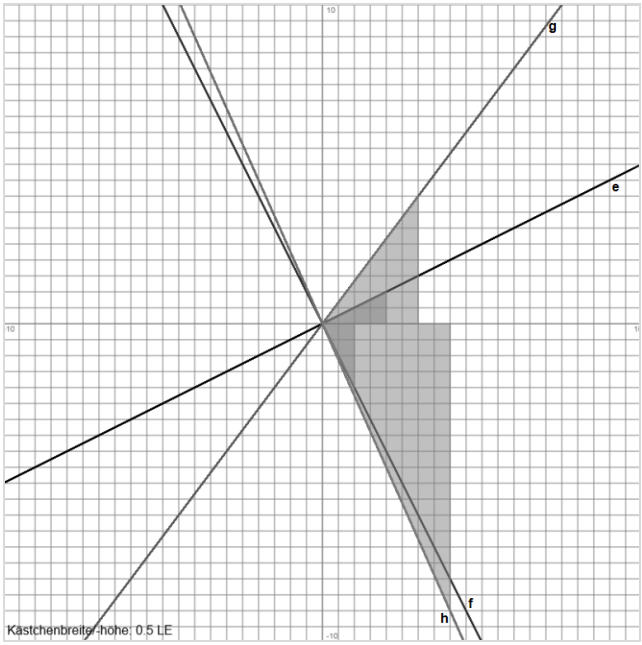
g) y = $\frac{4}{3}$x

h) y = $-\frac{9}{4}$x

Vorgehensweise: Die Steigung m der Ursprungsgeraden y = mx ist als Bruch m = p/q zu schreiben, so dass vom Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems das Steigungsdreieck (q nach rechts, p nach oben [p>0] bzw. nach unten [p<0]) eingetragen werden kann. Der Graph der Geraden geht durch den Koordinatenursprung und entlang des Steigungsdreiecks.

Lösungen:





Aufgabe 2: Ermittle die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden y = mx, wenn die Steigung m vorgegeben ist. Zeichne den Graphen der Geraden.

a) m = 2

b) m = $\frac{3}{4}$

c) m = 1

d) m = $-\frac{5}{7}$

e) m = -0,5

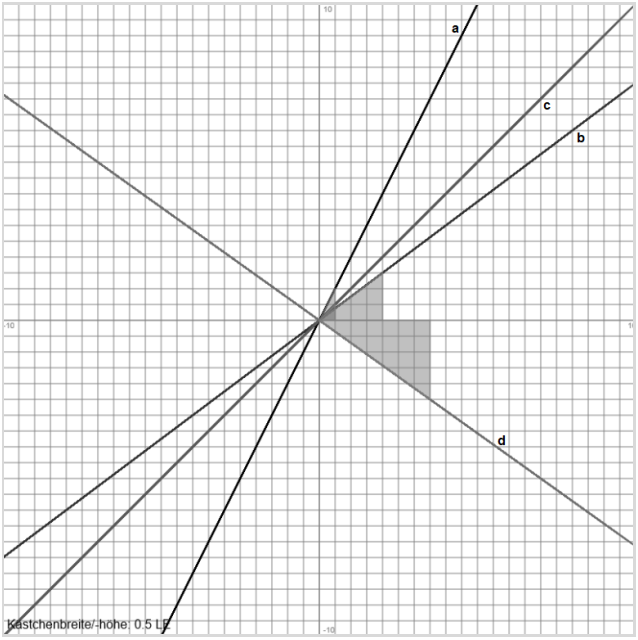
f) m = 3,2

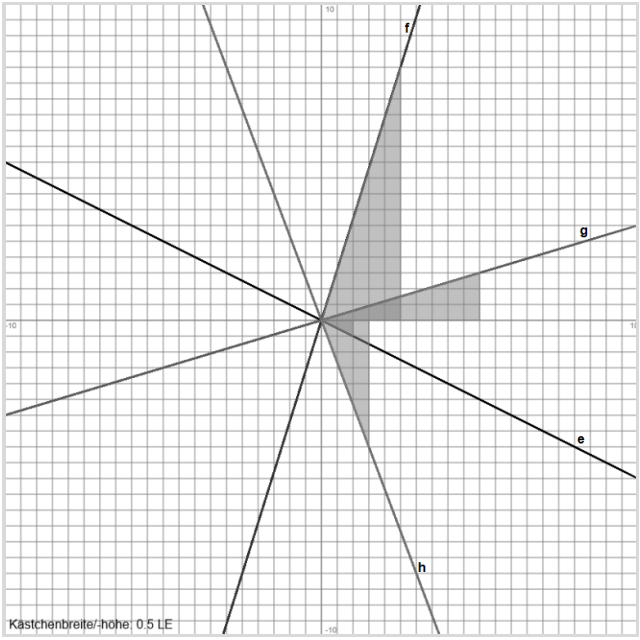
g) m = $\frac{3}{10}$

h) m = $-\frac{8}{3}$

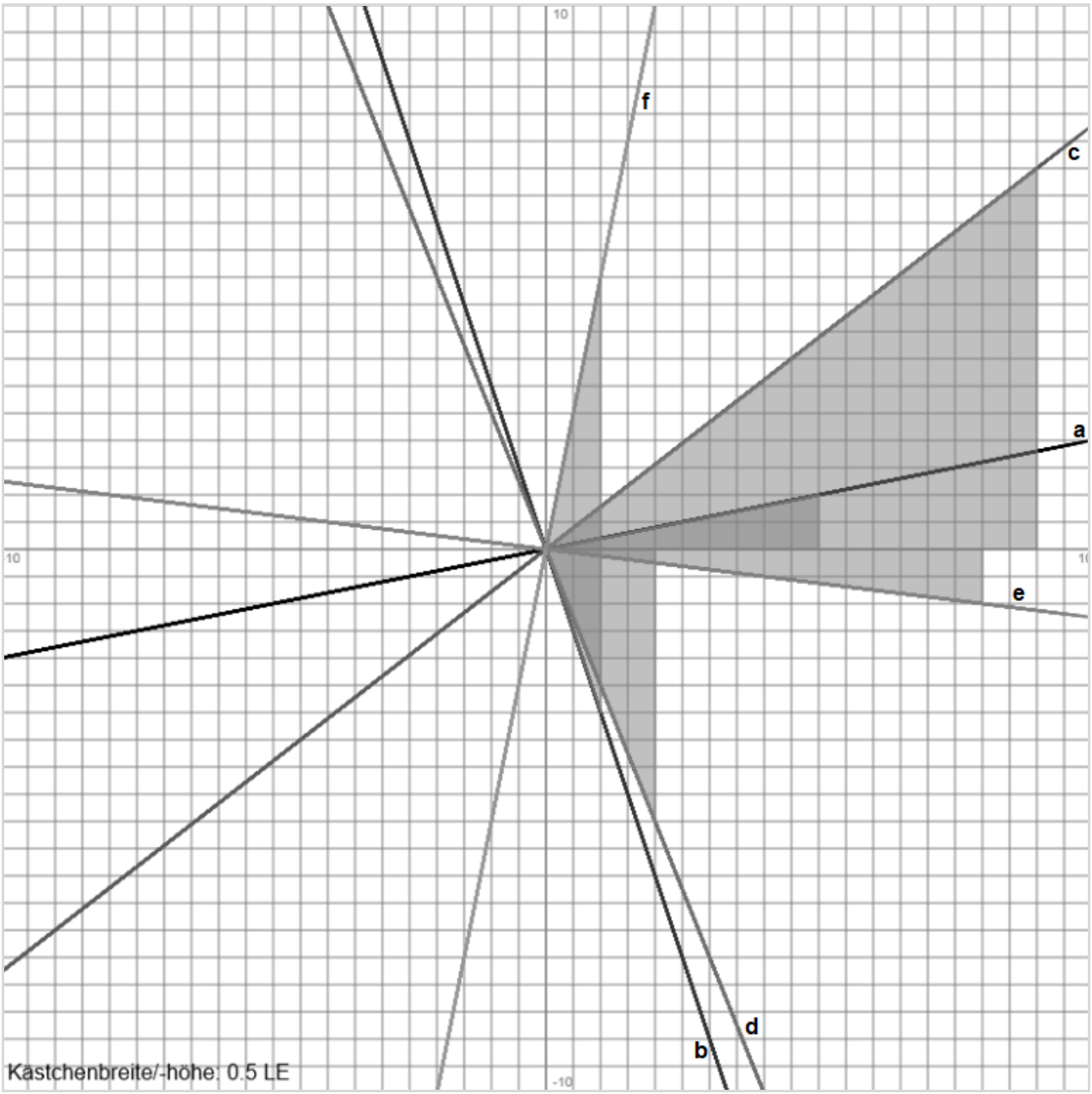
Vorgehensweise: Die Steigung m der Ursprungsgeraden y = mx ist als Bruch m = p/q zu schreiben, so dass vom Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems das Steigungsdreieck (q nach rechts, p nach oben [p>0] bzw. nach unten [p<0]) eingetragen werden kann. Der Graph der Geraden geht durch den Koordinatenursprung und entlang des Steigungsdreiecks.

Lösungen: a) y = 2x; b) y = 3x/4; c) y = x; d) y = -5x/7; e) y = -0,5x; f) y = 3,2x; g) y = 0,3x; h) y = -8x/3 ->





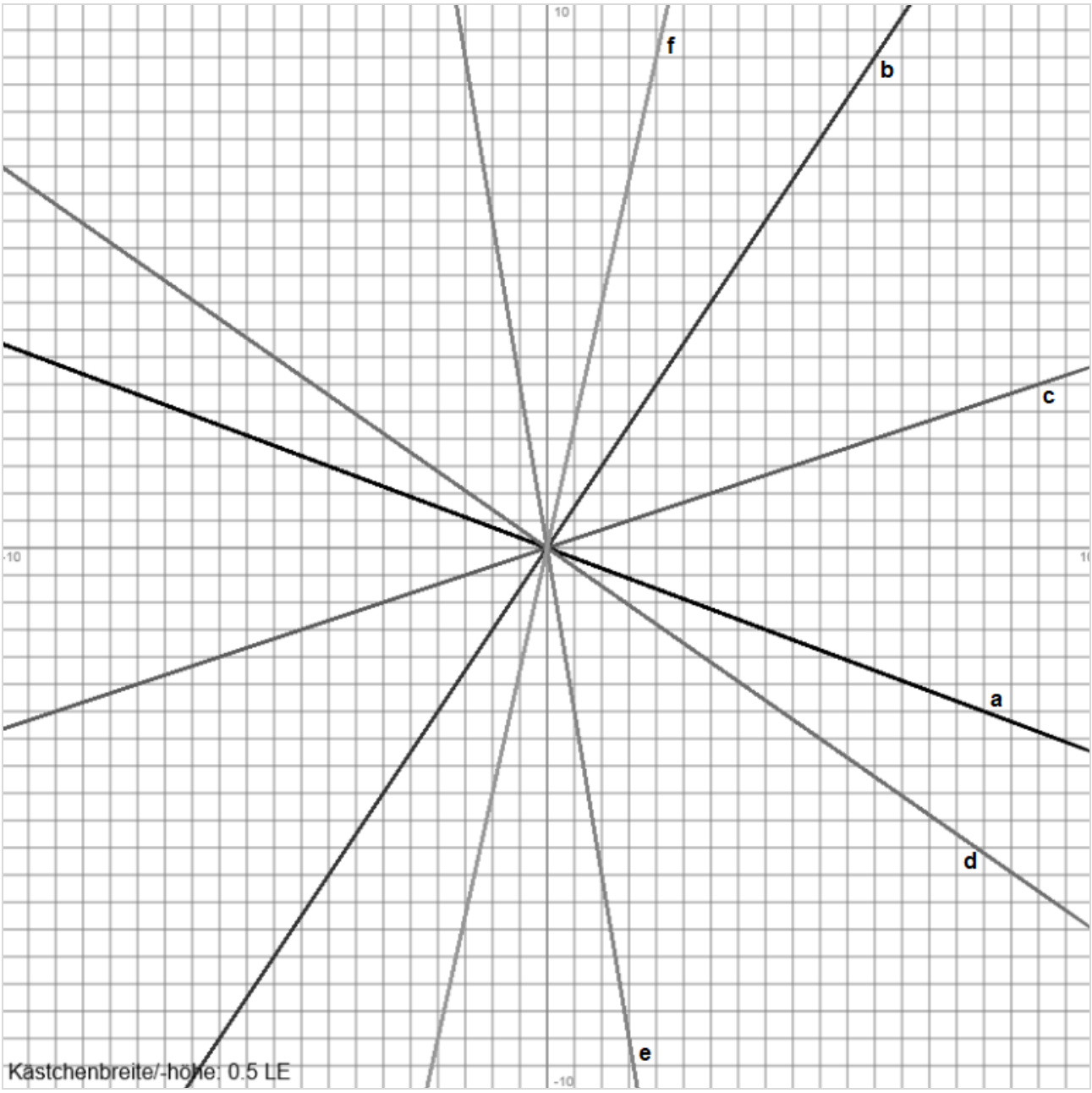
Aufgabe 3: Bestimme die Funktionsgleichungen der Ursprungsgeraden y = mx anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Ursprungsgeraden y = mx ist die Steigung mit Hilfe des Steigungsdreiecks zu bestimmen, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = x/5; b) y = -3x; c) y = 7x/9; d) y = -2,5x; e) y = -x/8; f) y = 5x.

Aufgabe 4: Bestimme die Funktionsgleichungen der Ursprungsgeraden y = mx anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Ursprungsgeraden y = mx ist die Steigung mit Hilfe eines (einzuzeichnenden) Steigungsdreiecks zu bestimmen, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = -3x/8; b) y = 3x/2; c) y = x/3; d) y = -0,7x; e) y = -6x; f) y = 4,5x.

Aufgabe 5: Zeichne die Gerade y = mx+b.

a) y = 2x + 1

b) y = 3x – 2

c) y = -4x – 3

d) y = -x + 8

e) y = x – 5

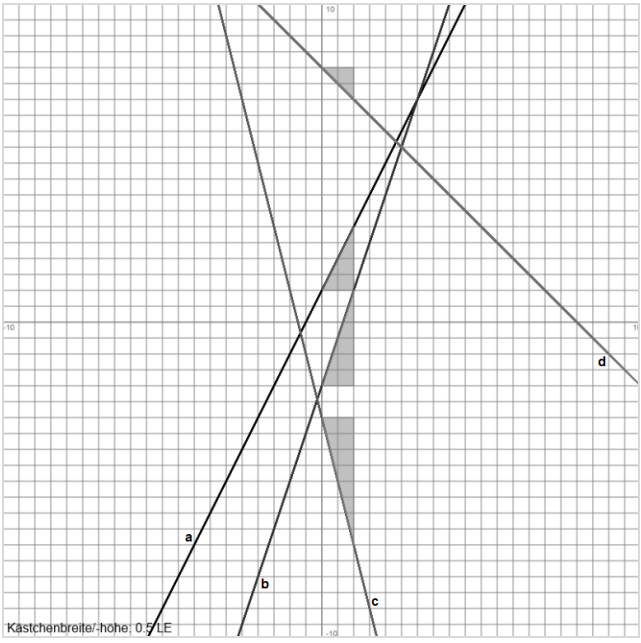
f) y = $\frac{11}{2}$x – 2

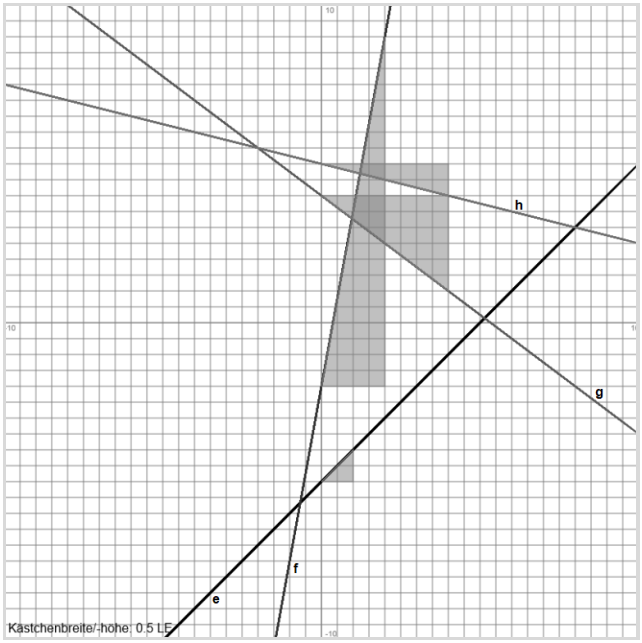
g) y = $-\frac{3}{4}$x + 4

h) y = -0,25x + 5

Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|b)$ in das x-y-Koordinatensystem einzutragen und die Steigung mit Hilfe eines (am y-Achsenabschnittspunkt einzuzeichnenden) Steigungsdreiecks zu bestimmen, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen:





Aufgabe 6: Zeichne die Gerade y = mx+b.

a) $y = \frac{5}{6}x$

b) y = 2,5x – 4

c) y = -3x + 3

d) $y = \frac{1}{5}x + 6$

e) $y = -\frac{7}{2}x + 2$

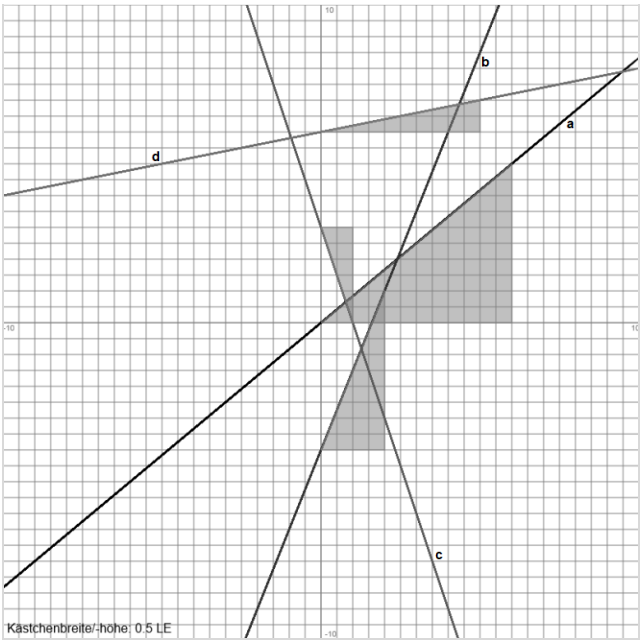
f) $y = \frac{5}{4}x - 8$

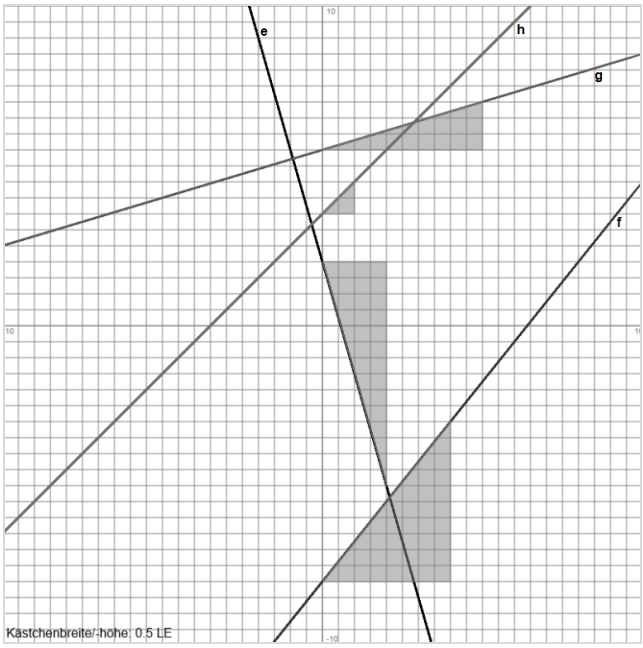
g) $y = \frac{3}{10}x + 5{,}5$

h) y = x + 3,5

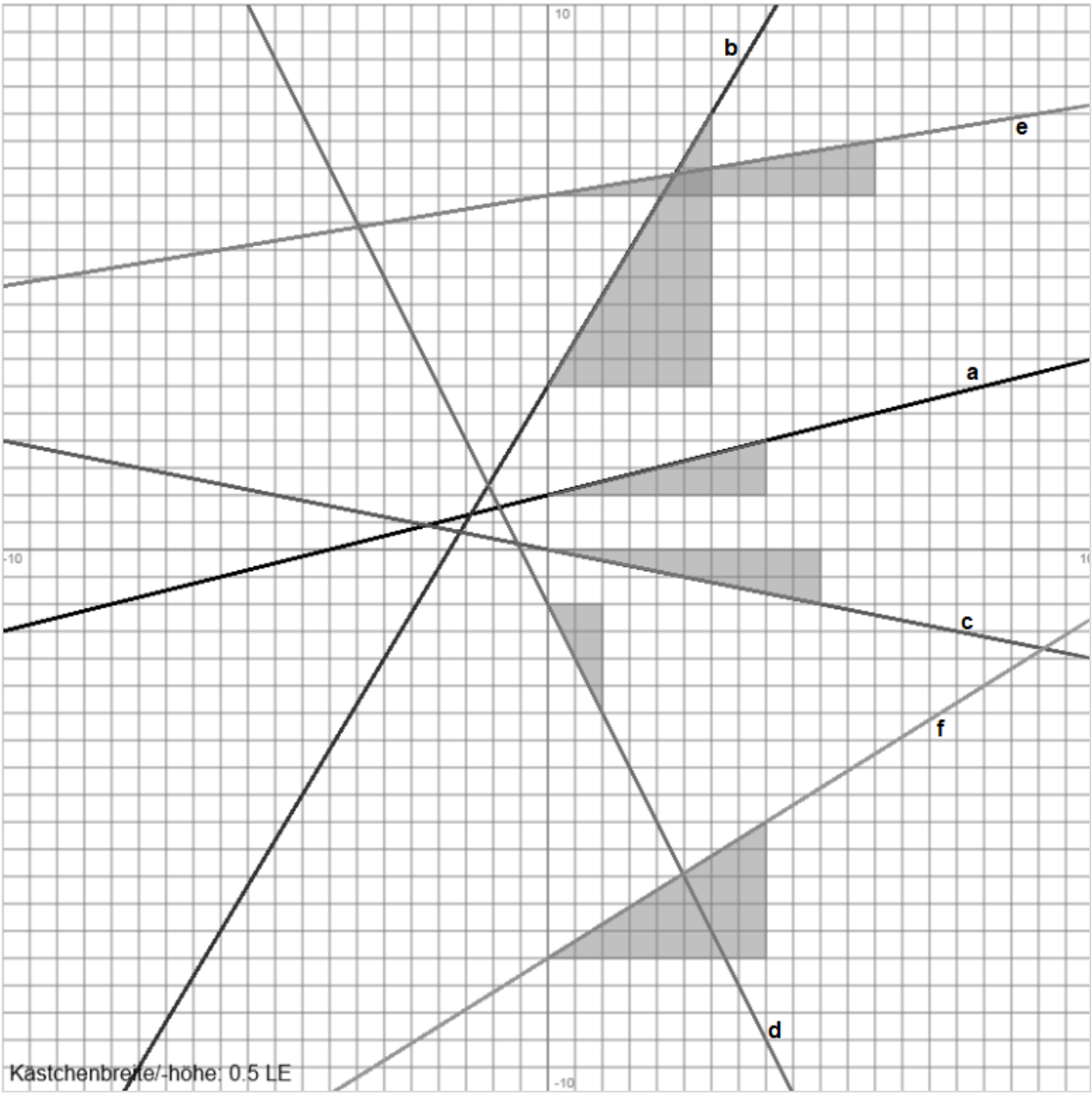
Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|b)$ in das x-y-Koordinatensystem einzutragen und die Steigung mit Hilfe eines (am y-Achsenabschnittspunkt einzuzeichnenden) Steigungsdreiecks zu bestimmen, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen:





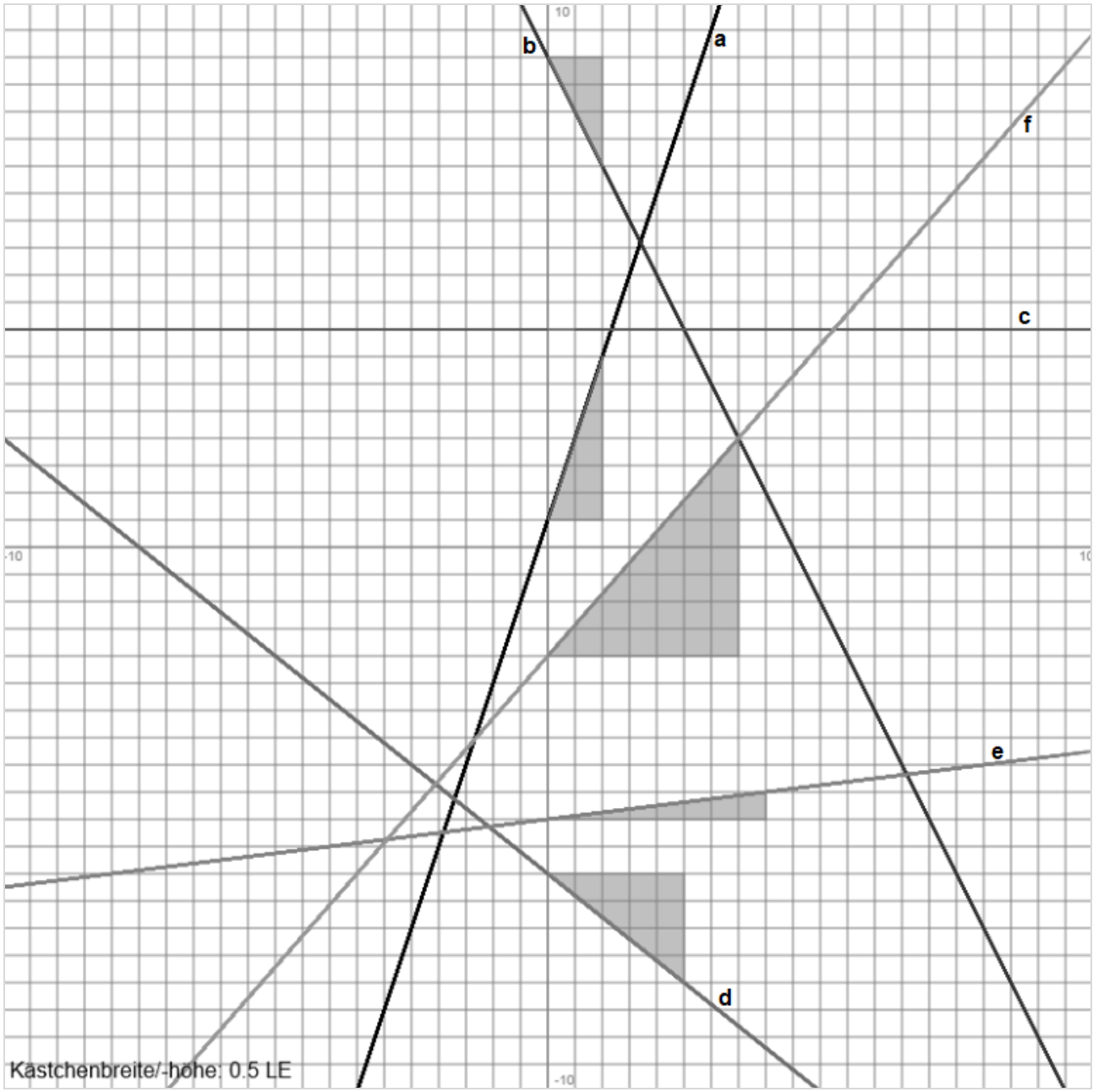
Aufgabe 7: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden y = mx+b anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist zu bestimmen der y-Achensabschnitt b und die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = x/4+1; b) y = 5x/3+3; c) y = -x/5; d) y = -2x–1; e) y = x/6+6,5; f) y = 5x/8–7,5.

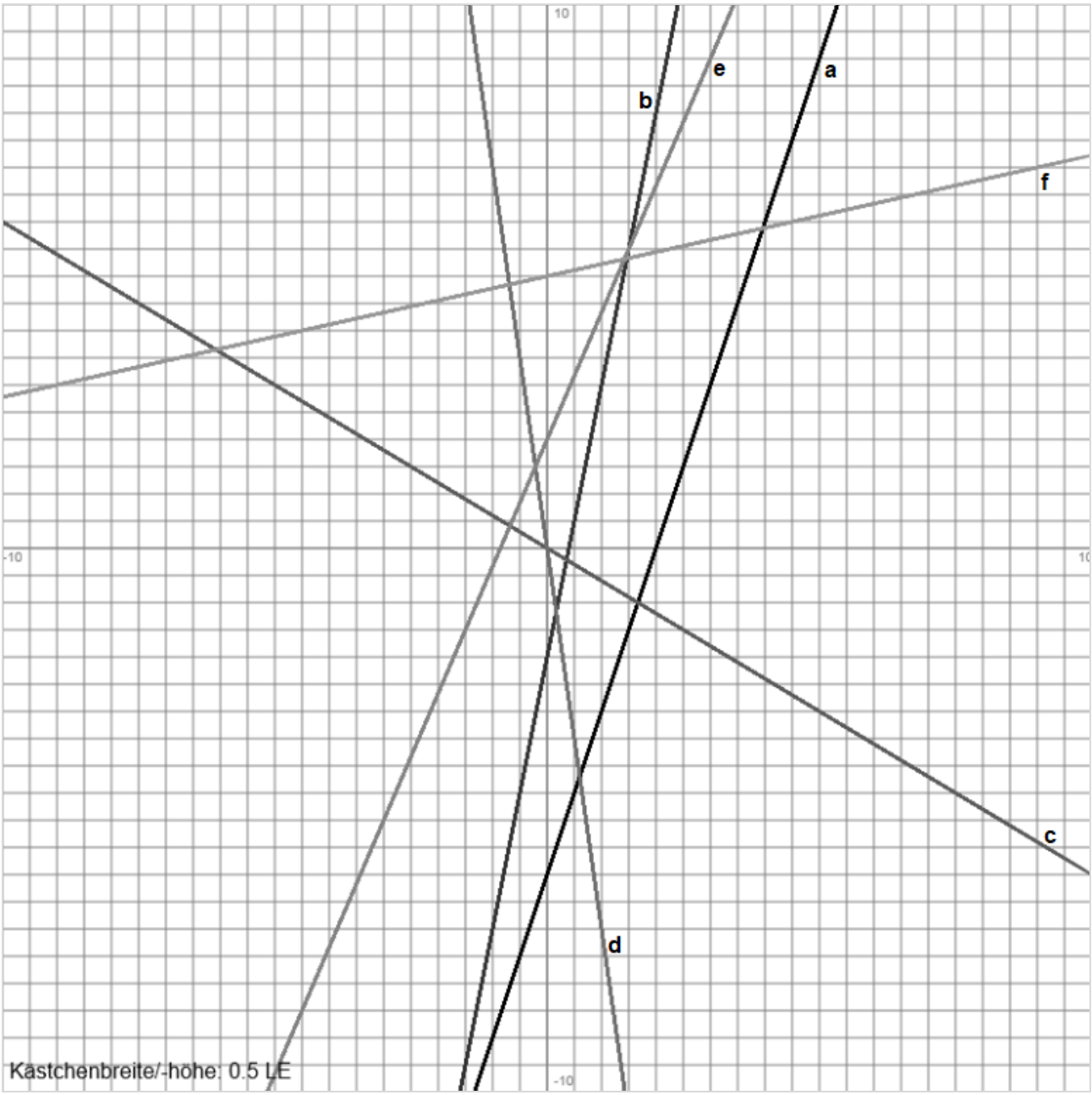
Aufgabe 8: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden y = mx+b anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist zu bestimmen der y-Achsenabschnitt b und die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = 3x+0,5; b) y = -2x+9; c) y = 4; d) y = -0,8x–6; e) y = x/8–5,5; f) y = 8x/7–2.

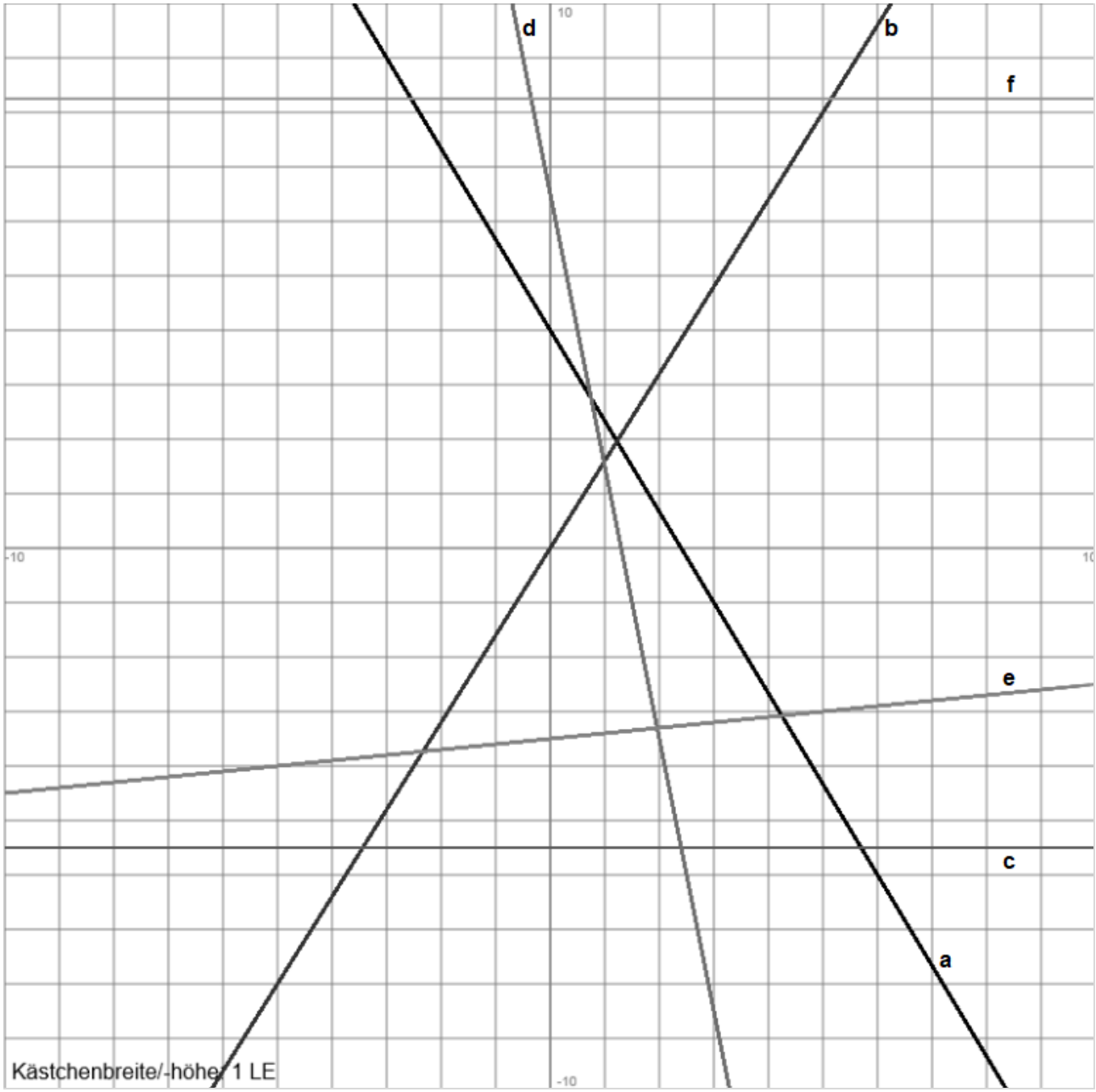
Aufgabe 9: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden y = mx+b anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist zu bestimmen der y-Achsenabschnitt b und die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = 3x–6; b) y = 5x–2; c) y = -3x/5; d) y = -7x; e) y = 7x/3+2; f) y = 2x/9+5.

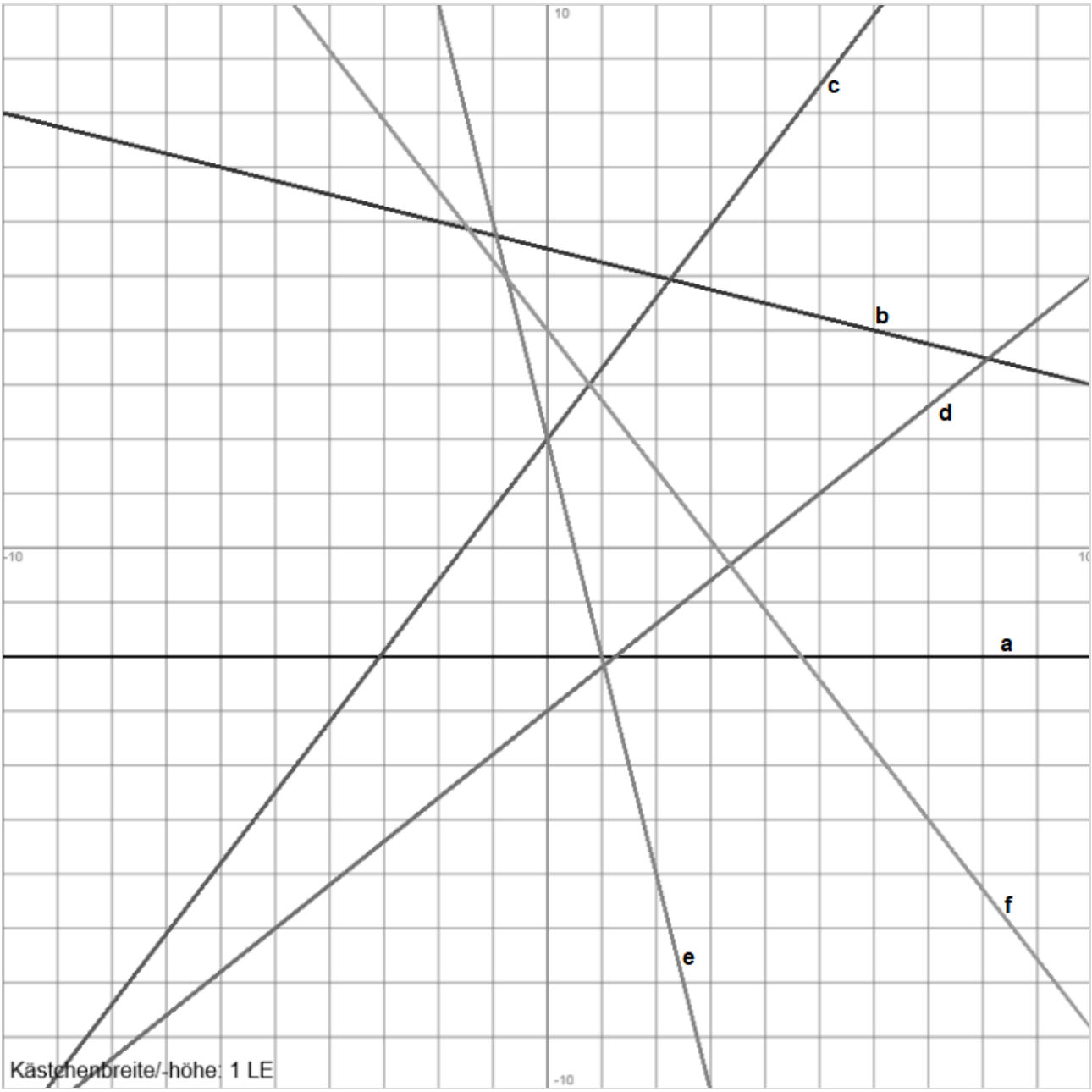
Aufgabe 10: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden y = mx+b anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist zu bestimmen der y-Achsenabschnitt b und die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = -5x/3+4; b) y = 1,6x; c) y = -5,5; d) y = -5x+6,5; e) y = 0,1x–3,5; f) y = 8,25.

Aufgabe 11: Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden y = mx+b anhand der untenstehenden Graphen.



Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist zu bestimmen der y-Achsenabschnitt b und die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: a) y = -2; b) y = -0,25x+5,5; c) y = 1,3x+2; d) y = 0,8x–3; e) y = -4x+2; f) y = -9x/7+4.

Aufgabe 12: Zeichne die Graphen der Geraden y = mx+b ein mit Hilfe einer x-y-Wertetabelle (x-Werte: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4).

a) $y = \frac{11}{4}$

b) $y = -1{,}5x - 2$

c) $y = \frac{2}{5}x + 1$

d) $y = 2x - 5$

e) $y = -\frac{3}{2}x + 4{,}5$

f) $y = -\frac{7}{4}x + 2{,}5$

g) $y = \frac{5}{3}x$

h) $y = x - 4$

Vorgehensweise: Zum Graphen der jeweiligen Geraden y = mx+b ist zu bestimmen der y-Achsenabschnitt b und die Steigung m mit Hilfe des Steigungsdreiecks, so dass m = p/q gilt (p nach rechts, q nach oben bzw. unten entlang des Steigungsdreiecks).

Lösungen: I. Wertetabellen:

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	2,5	1	-0,5	-2	-3,5	-5	-6,5	-8

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-0,6	-0,2	0,2	0,6	1	1,4	1,8	2,2	2,6

d)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3

e)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	10,5	9	7,5	6	4,5	3	1,5	0	-1,5

f)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9,5	7,75	6	4,25	2,5	0,75	-1	-2,75	-4,5

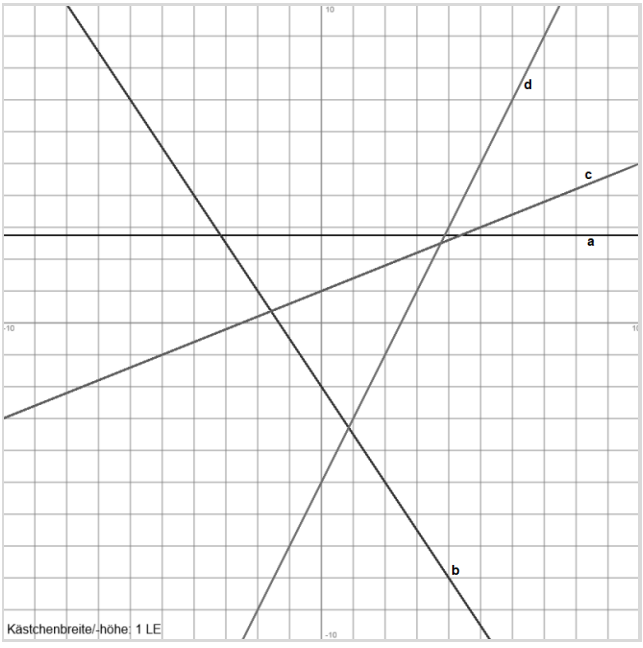
g)

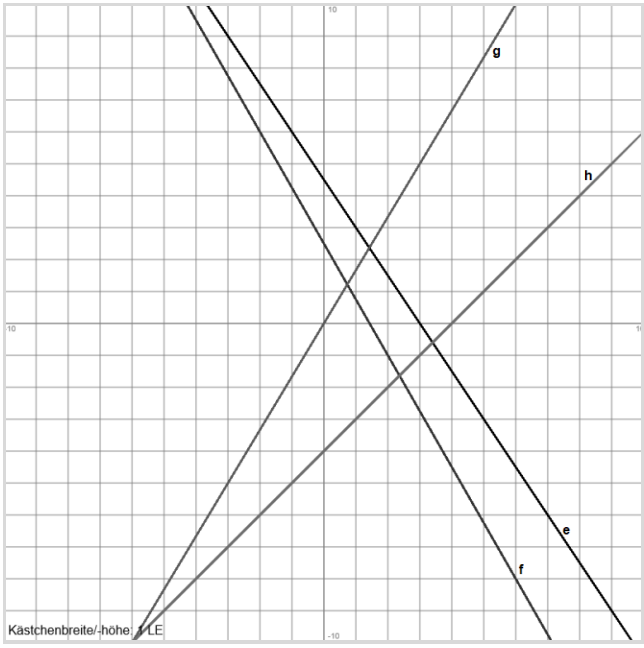
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-20/3	-5	-10/3	-5/3	0	5/3	10/3	5	20/3

h)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

II. Graphen:





Aufgabe 13: Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden y = mx+b, wenn für diese die nachstehenden Wertetabellen gelten.

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8,8	6,6	4,4	2,2	0	-2,2	-4,4	-6,6	-8,8

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7,5	-6,5	-5,5	-4,5	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	14	12	10	8	6	4	2	0	-2

d)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

e)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1/3	0	-1/3	-2/3	-1	-4/3	-5/3	-2	-7/3

f)

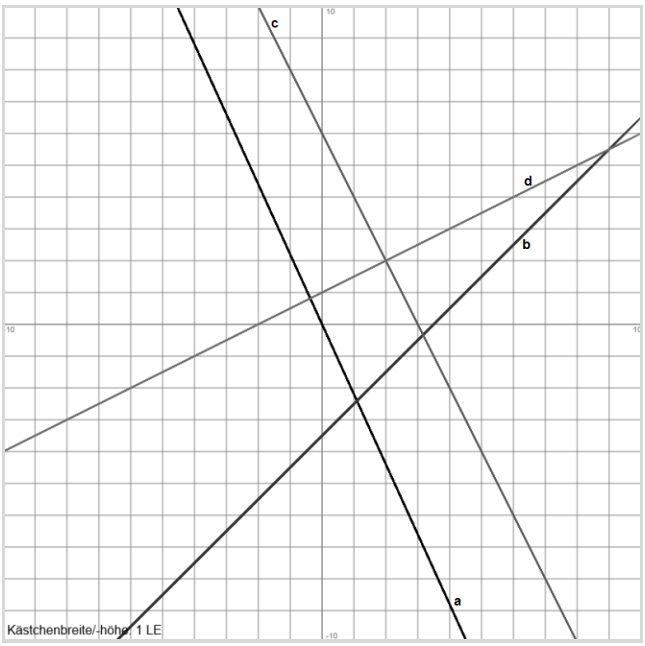
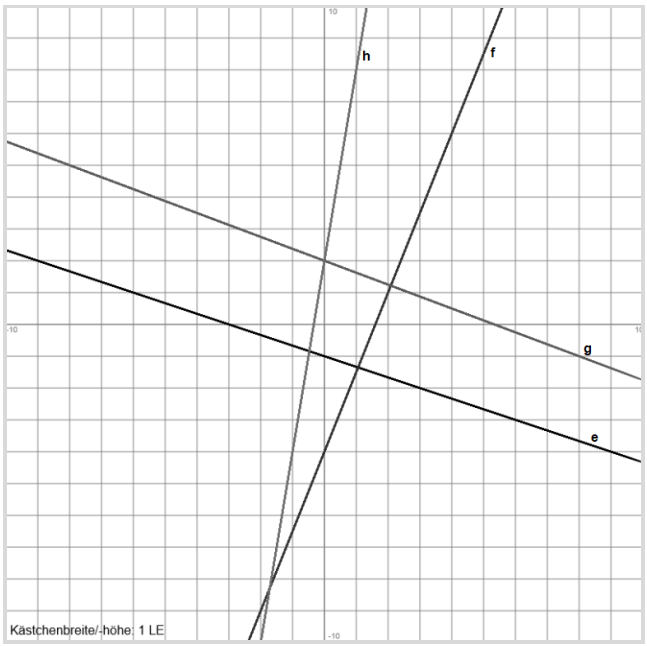
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-14	-11,5	-9	-6,5	-4	-1,5	1	3,5	6

g)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	7/2	25/8	11/4	19/8	2	13/8	5/4	7/8	1/2

h)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-22	-16	-10	-4	2	8	14	20	26

Vorgehensweise: I. Zwei Geradenpunkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ werden aus der Wertetabelle ausgewählt. II. Ermittlung der Geradengleichung: Die Steigung m errechnet sich aus den vorgegebenen Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ gemäß der Formel: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Das Einsetzen der Steigung m bzw. der x- und y-Koordinaten des vorgegebenen Punktes $P(x_1|y_1)$ bzw. $Q(x_2|y_2)$ (Punktprobe) in den Geradenterm y = mx+b führt auf: $b = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$.

Lösungen: a) y = -2,2x; b) y = x–3,5; c) y = -2x+6; d) y = 0,5x+1; e) y = -x/3–1, f) y = 2,5x–4,1; g) y = -3x/8+2; h) y = 6x+2.