Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Einleitung: Ganz rationale Funktionen f: **R** -> **R** besitzen den Funktionsterm: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ (für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n; $a_n \neq 0$). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Für die Kurvendiskussion einer ganz rationalen Funktion f(x) folgt:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion

Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor):

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$$

$$f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$$

II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen):
f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)

III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen):
a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, …
b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …

IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen):
a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, …
b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …

IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt:
f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):
– Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0);
– Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); …
– Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0)

VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):
– Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0);
– Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); …
– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0)

VII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade)
c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.
f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

a_n>0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

a_n<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 12x - x^3$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

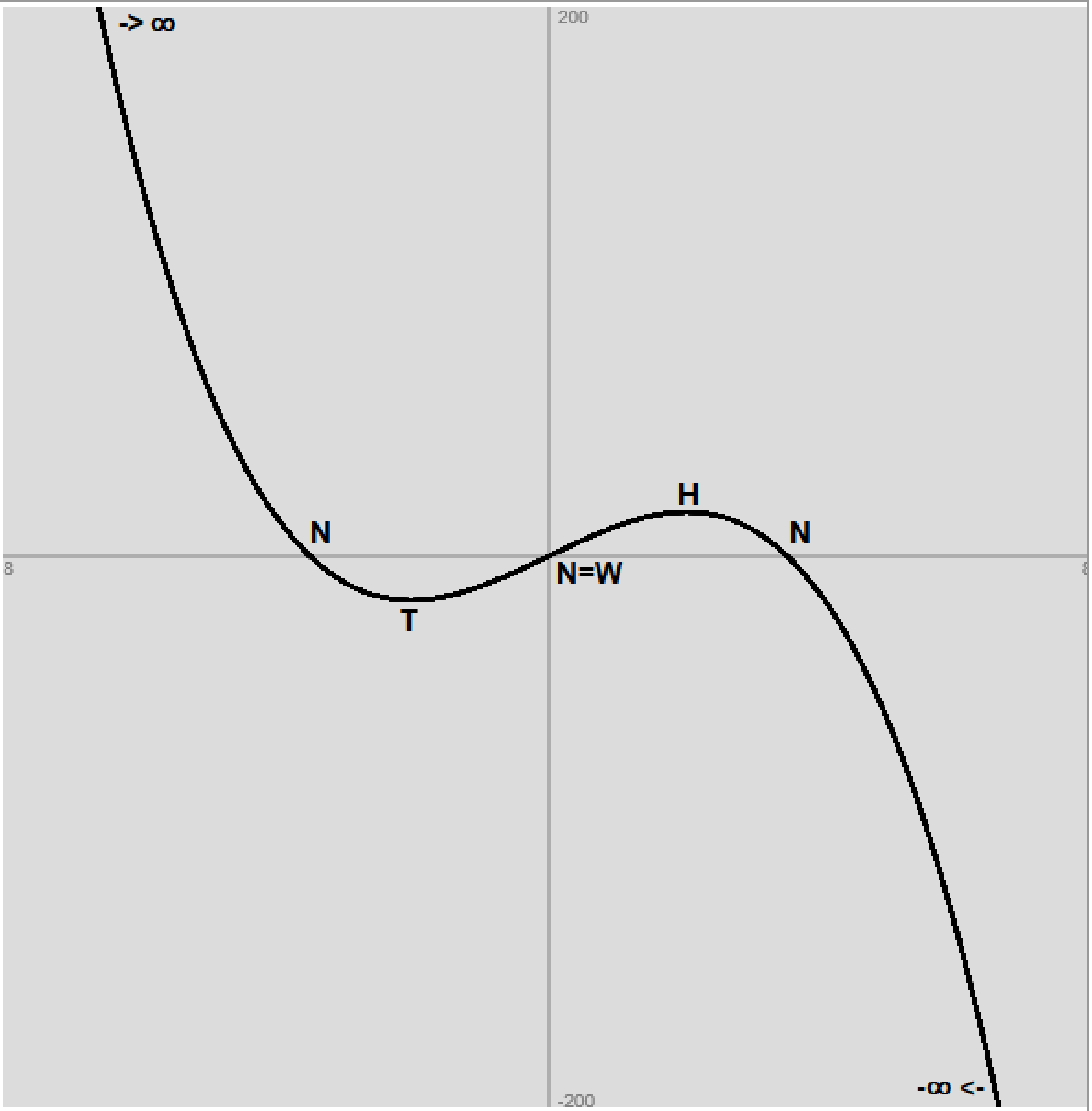
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-3.46	-0.0983	-23.9148	20.76	-6	Nullstelle N(-3.47|0)
-2	-16	0	12	-6	Tiefpunkt T(-2|-16)
0	0	12	0	-6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
2	16	0	-12	-6	Hochpunkt H(2|16)
3.47	-0.1419	-24.1227	-20.82	-6	Nullstelle N(3.47|0)

Graph:



f(-x) = f(x) => Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

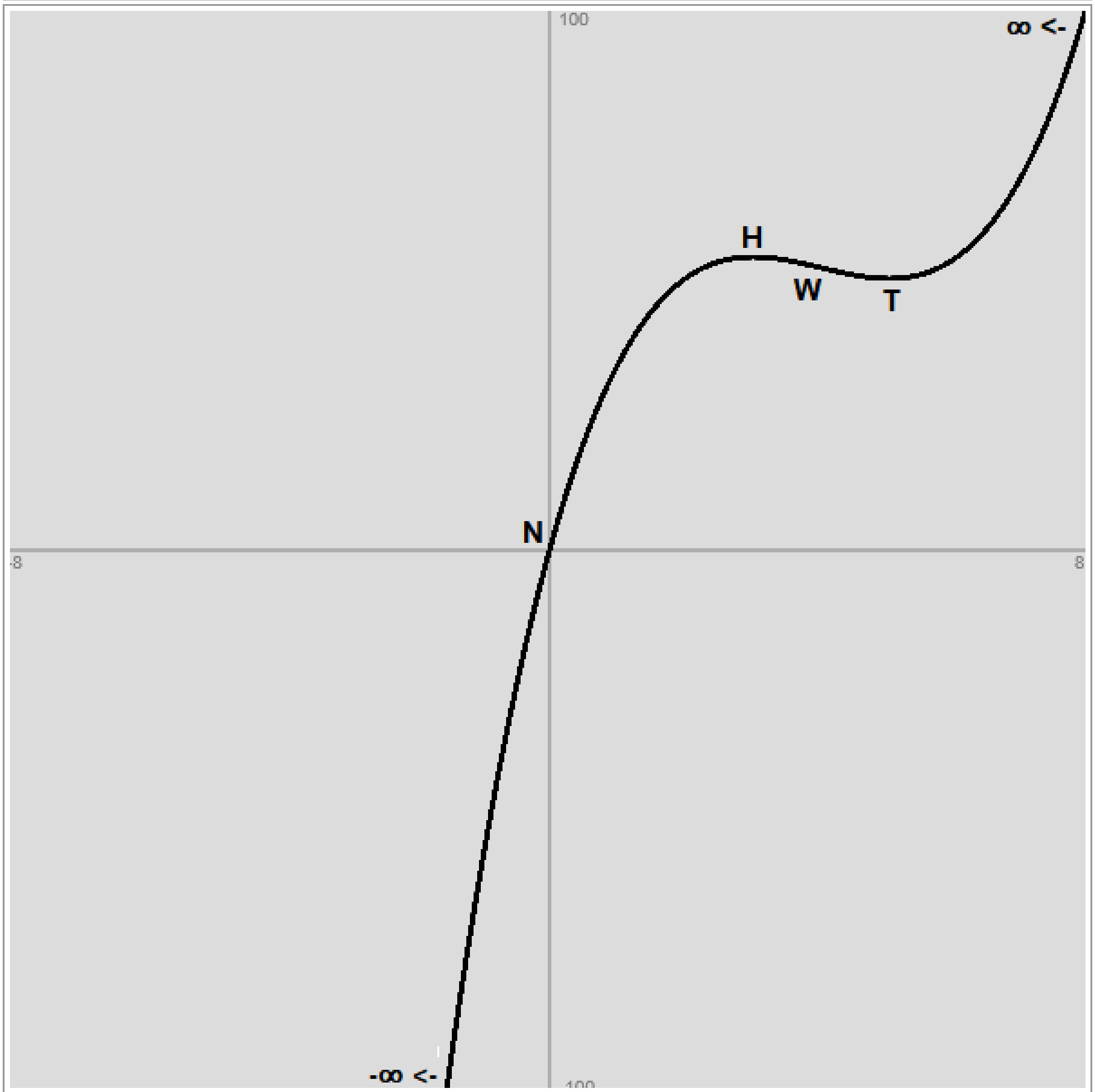
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	45	-24	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
3	54	0	-6	6	Hochpunkt H(3|54)
4	52	-3	0	6	Wendepunkt W(4|52)
5	50	0	6	6	Tiefpunkt T(5|50)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Die Funktion ist als ganz rationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(4|52).

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

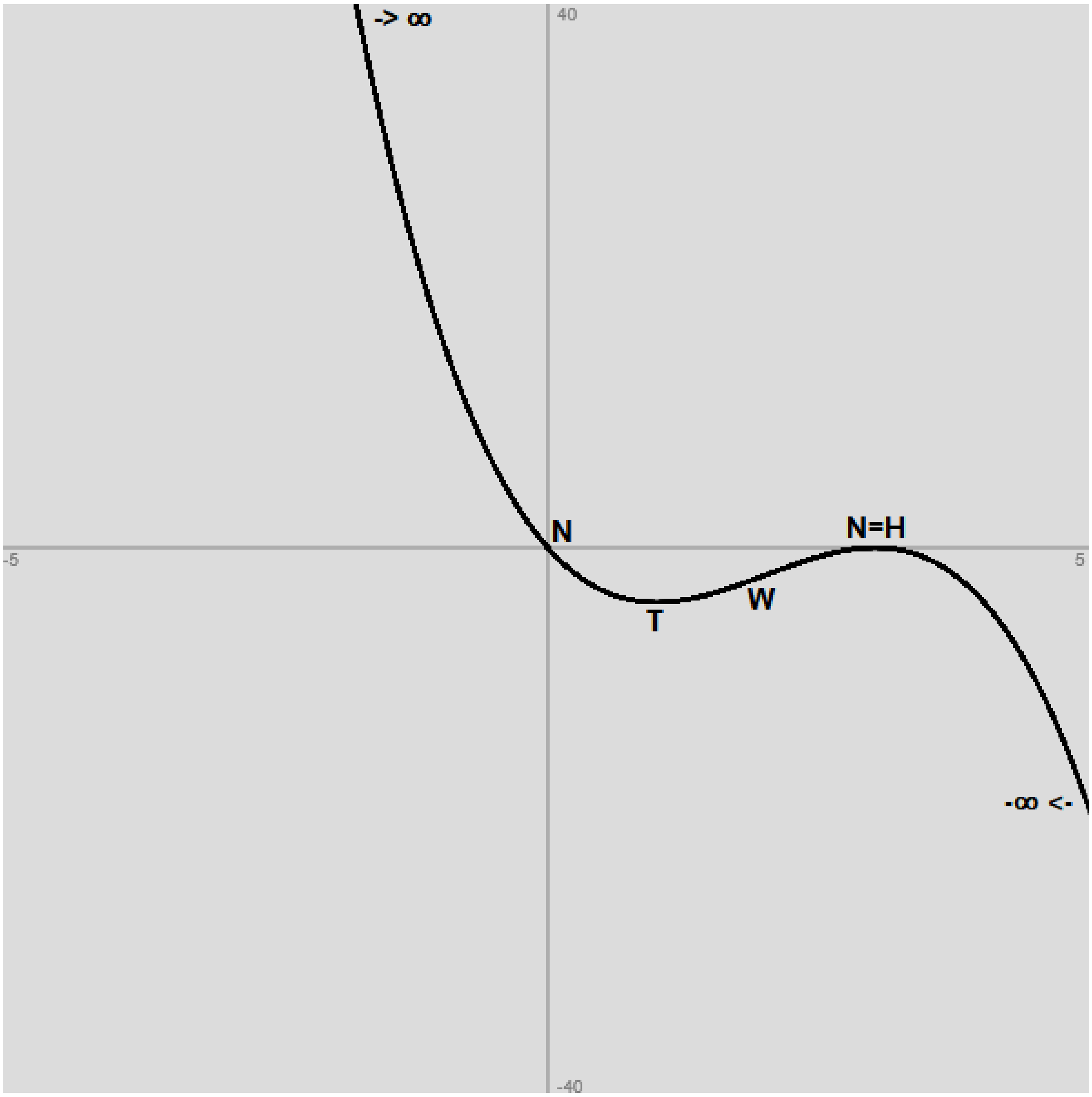
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	-9	12	-6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1	-4	0	6	-6	Tiefpunkt T(1|-4)
2	-2	3	0	-6	Wendepunkt W(2|-2)
3	0	0	-6	-6	Nullstelle N(3|0) = Hochpunkt H(3|0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Die Funktion ist als ganz rationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(2|-2).

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x + 5$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

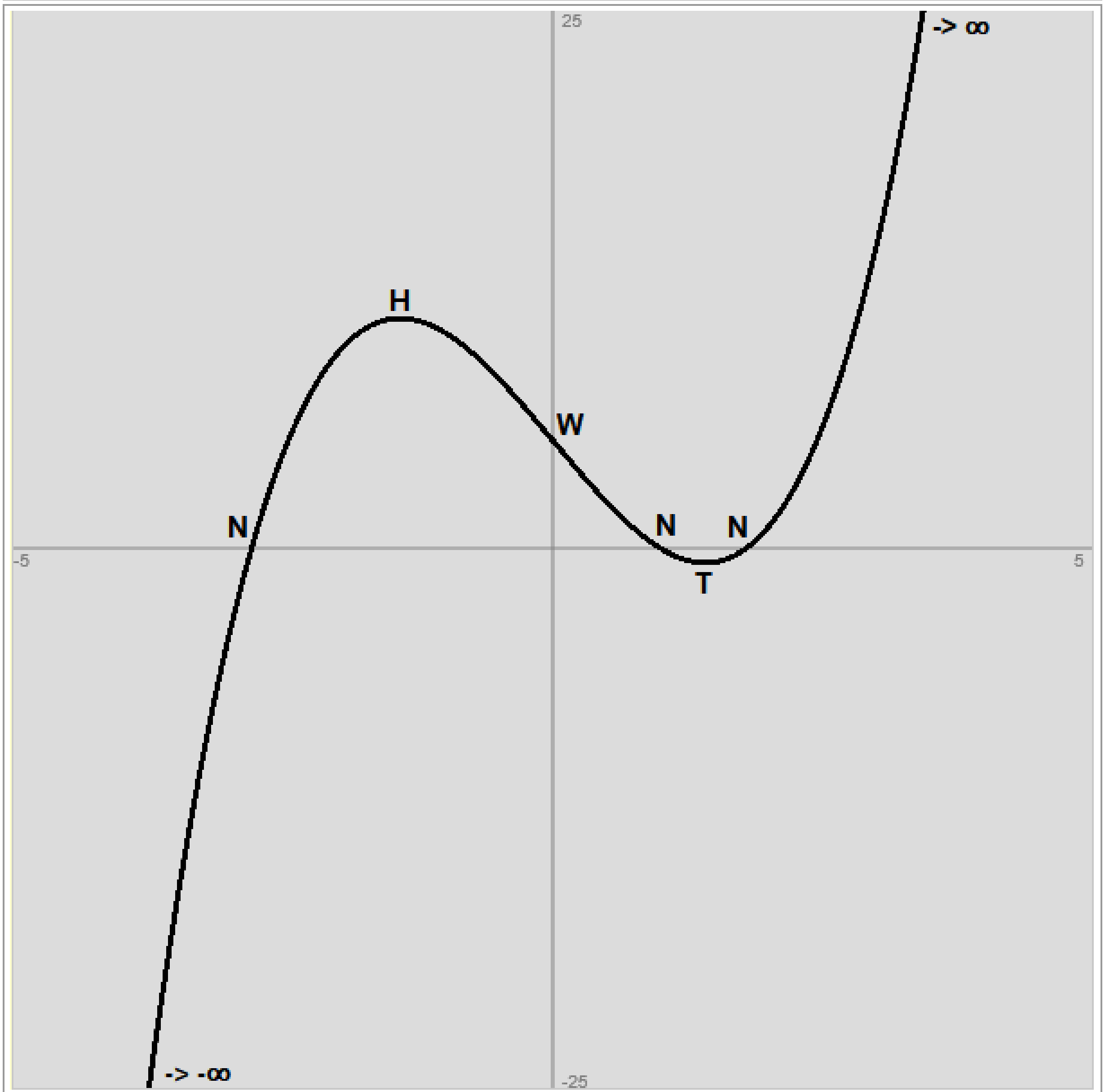
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2.79	0.0224	17.3523	-16.74	6	Nullstelle N(-2.79|0)
-1.41	10.6568	-0.0357	-8.46	6	Hochpunkt H(-1.41|10.66)
0	5	-6	0	6	Schnittpunkt S_y(0|5) = Wendepunkt W(0|5)
1	0	-3	6	6	Nullstelle N(1|0)
1.42	-0.6567	0.0492	8.52	6	Tiefpunkt T(1.42|-0.66)
1.8	0.032	3.72	10.8	6	Nullstelle N(1.8|0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

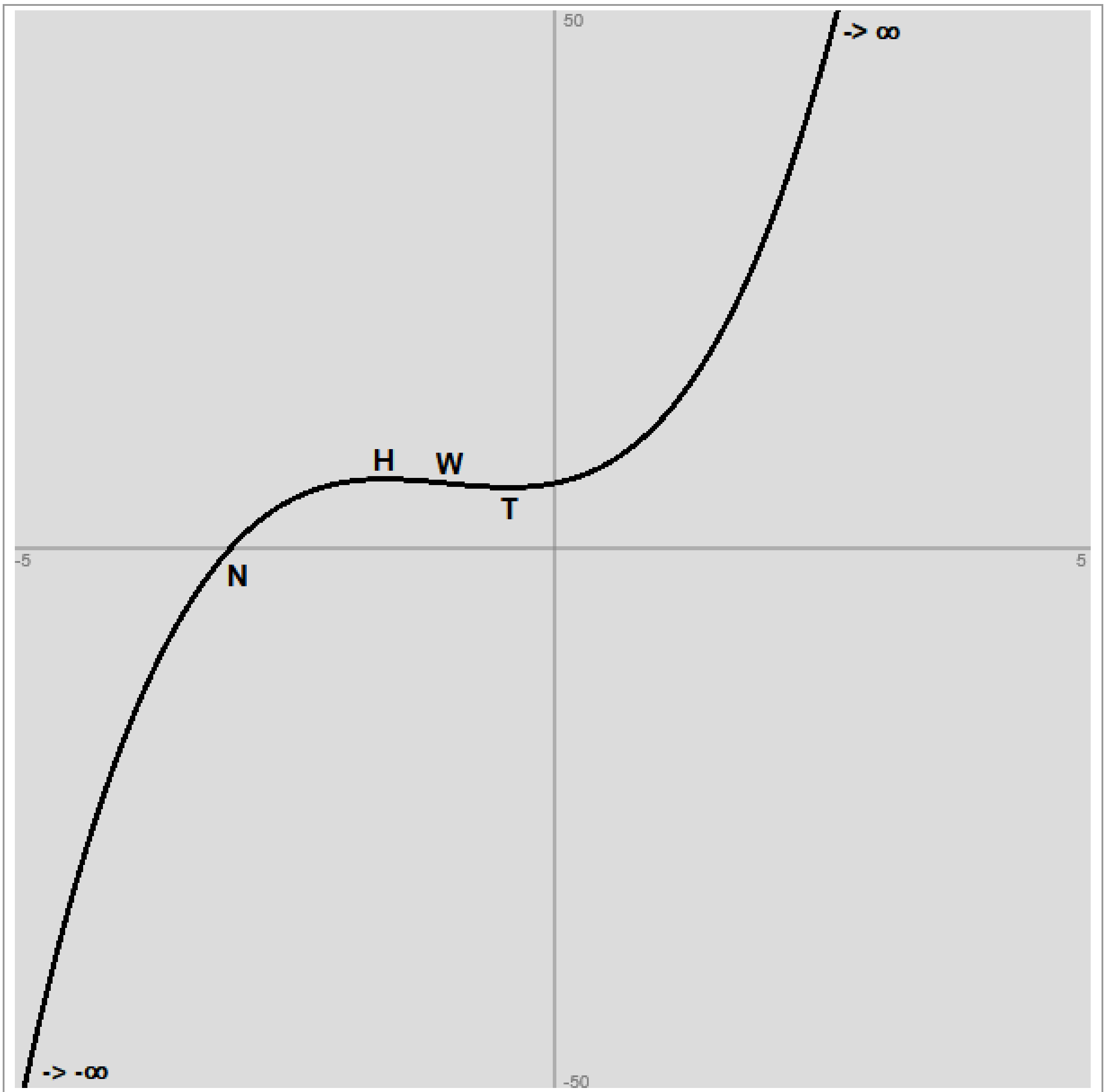
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-3	0	11	-12	6	Nullstelle N(-3|0)
-1.57	6.3848	-0.0253	-3.42	6	Hochpunkt H(-1.57|6.38)
-1	6	-1	0	6	Wendepunkt W(-1|6)
-0.42	5.6151	0.0092	3.48	6	Tiefpunkt T(-0.42|5.62)
0	6	2	6	6	Schnittpunkt S_y(0|6)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

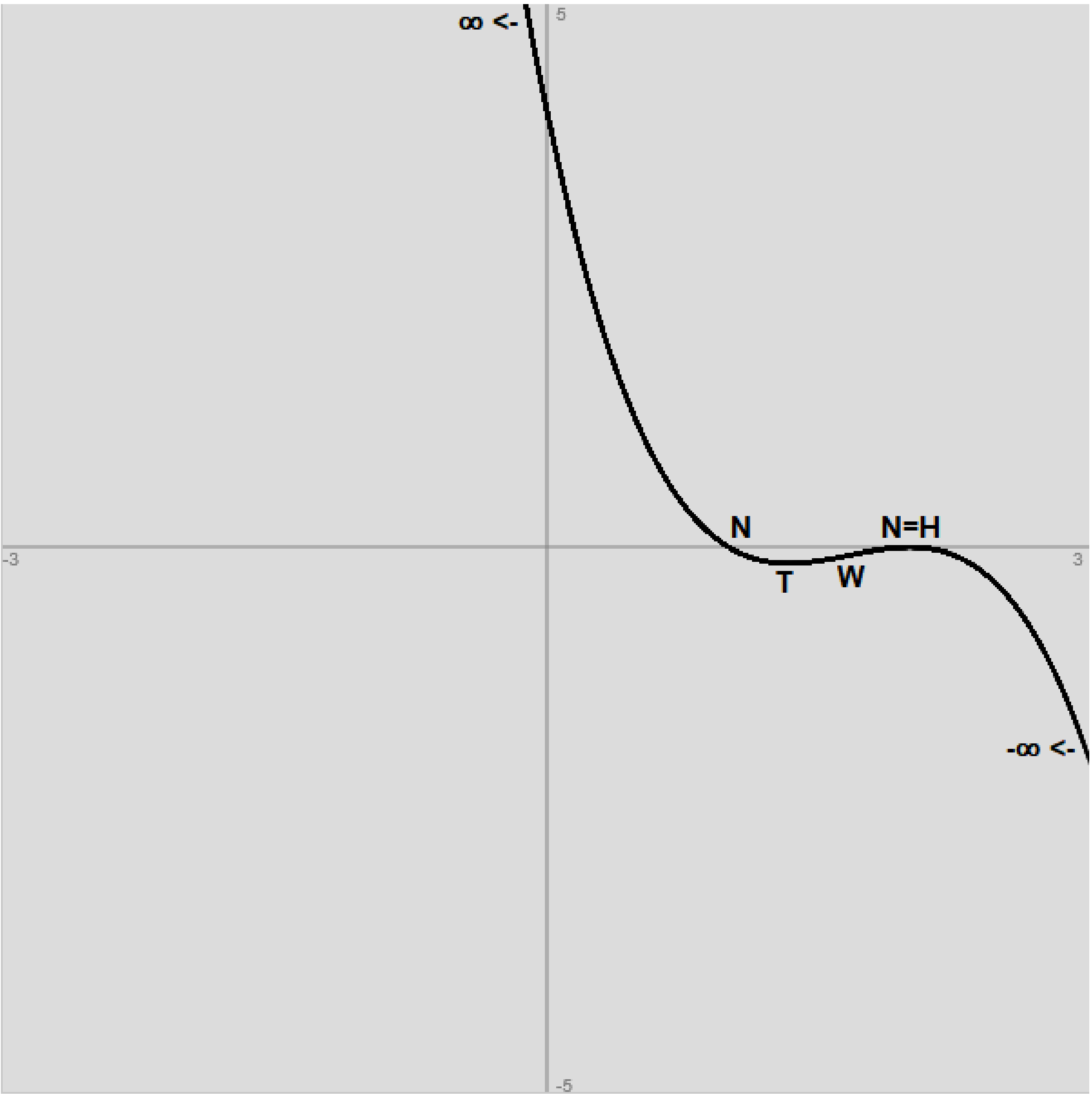
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	4	-8	10	-6	Schnittpunkt $S_y(0\|4)$
1	0	-1	4	-6	Nullstelle N(1|0)
1.34	-0.1481	0.0132	1.96	-6	Tiefpunkt T(1.34|-0.15)
1.67	-0.073	0.3333	-0.02	-6	Wendepunkt W(1.67|-0.07)
2	0	0	-2	-6	Nullstelle N(2|0) = Hochpunkt H(2|0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x) = (x^2 - x - 2)(x - 1)$$

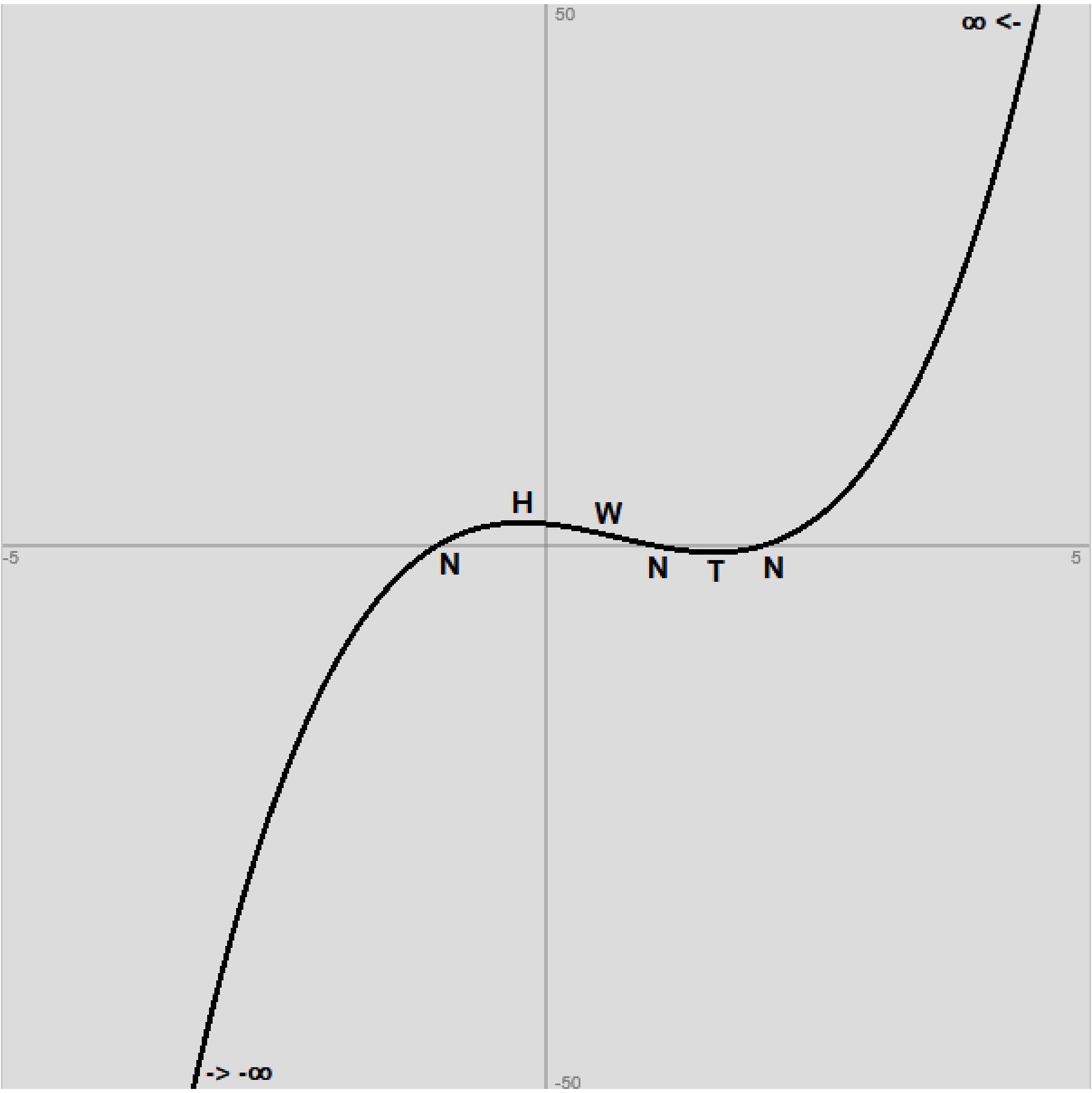
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞). **Lösung**:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	6	-10	Nullstelle N(-1|0)
-0.22	2.1126	0.03	-5.32	Hochpunkt H(-0.22|2.11)
0	2	-1	-4	Schnittpunkt S_y(0|2)
0.66	0.7563	-2.33	-0.04	Wendepunkt W(0.66|0.76)
1	0	-2	2	Nullstelle N(1|0)
1.54	-0.6309	-0.05	5.24	Tiefpunkt T(1.54|-0.63)
2	0	3	8	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Gerade, ungerade Exponenten der Potenzen -> keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zum Ursprung

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

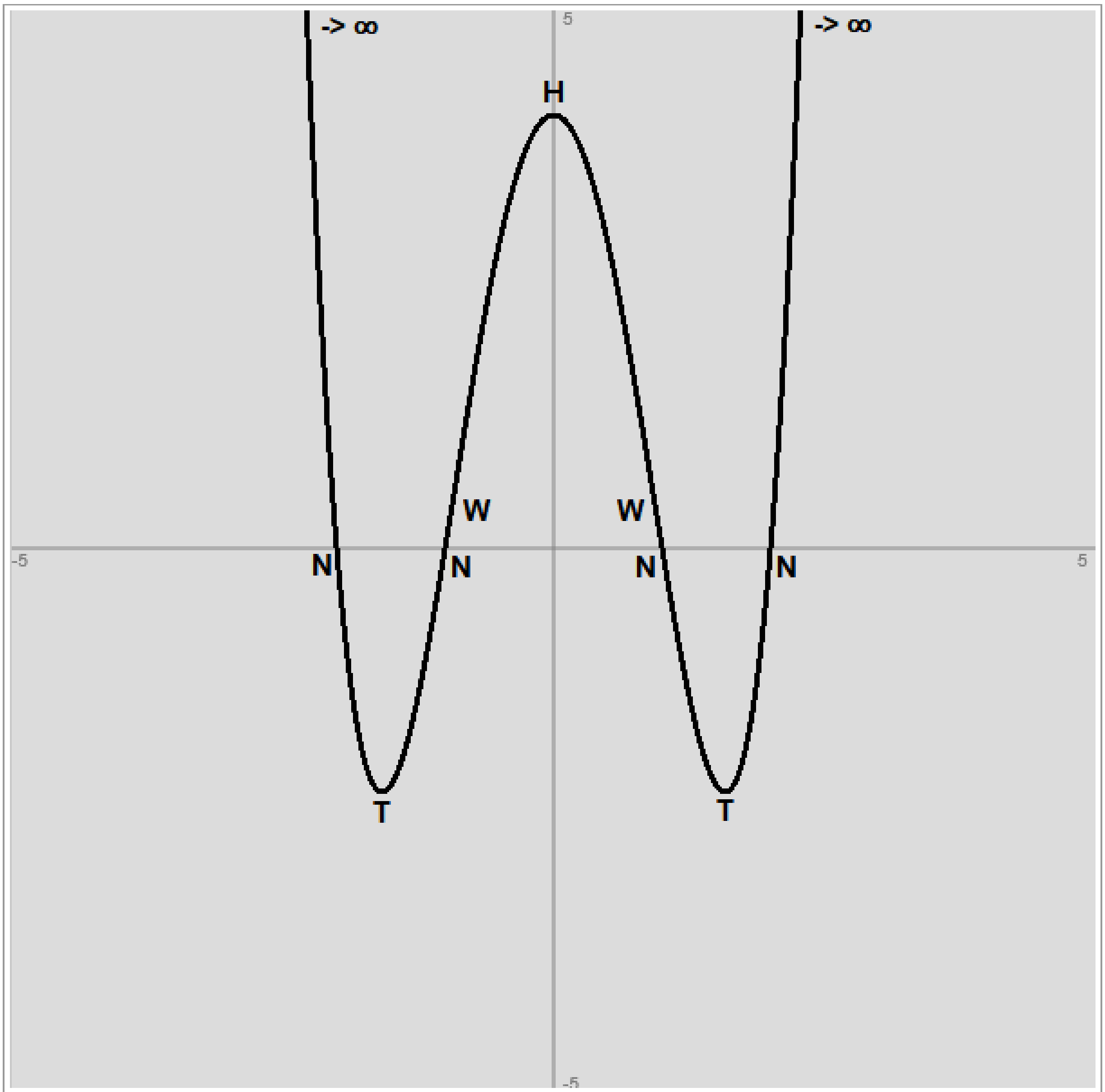
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞). **Lösung**:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-12	38	-48	Nullstelle N(-2|0)
-1.58	-2.25	0.0228	19.9568	-37.92	Tiefpunkt T(-1.58|-2.25)
-1	0	6	2	-24	Nullstelle N(-1|0)
-0.91	0.5452	6.0857	-0.0628	-21.84	Wendepunkt W(-0.91|0.55)
0	4	0	-10	0	Schnittpunkt S_y(0|4) = Hochpunkt H(0|4)
0.92	0.4844	-6.0852	0.1568	22.08	Wendepunkt W(0.92|0.48)
1	0	-6	2	24	Nullstelle N(1|0)
1.59	-2.2492	0.1787	20.3372	38.16	Tiefpunkt T(1.59|-2.25)
2	0	12	38	48	Nullstelle N(2|0)

Graph:



f(-x) = f(x) -> Achsensymmetrie zur y-Achse
x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$$

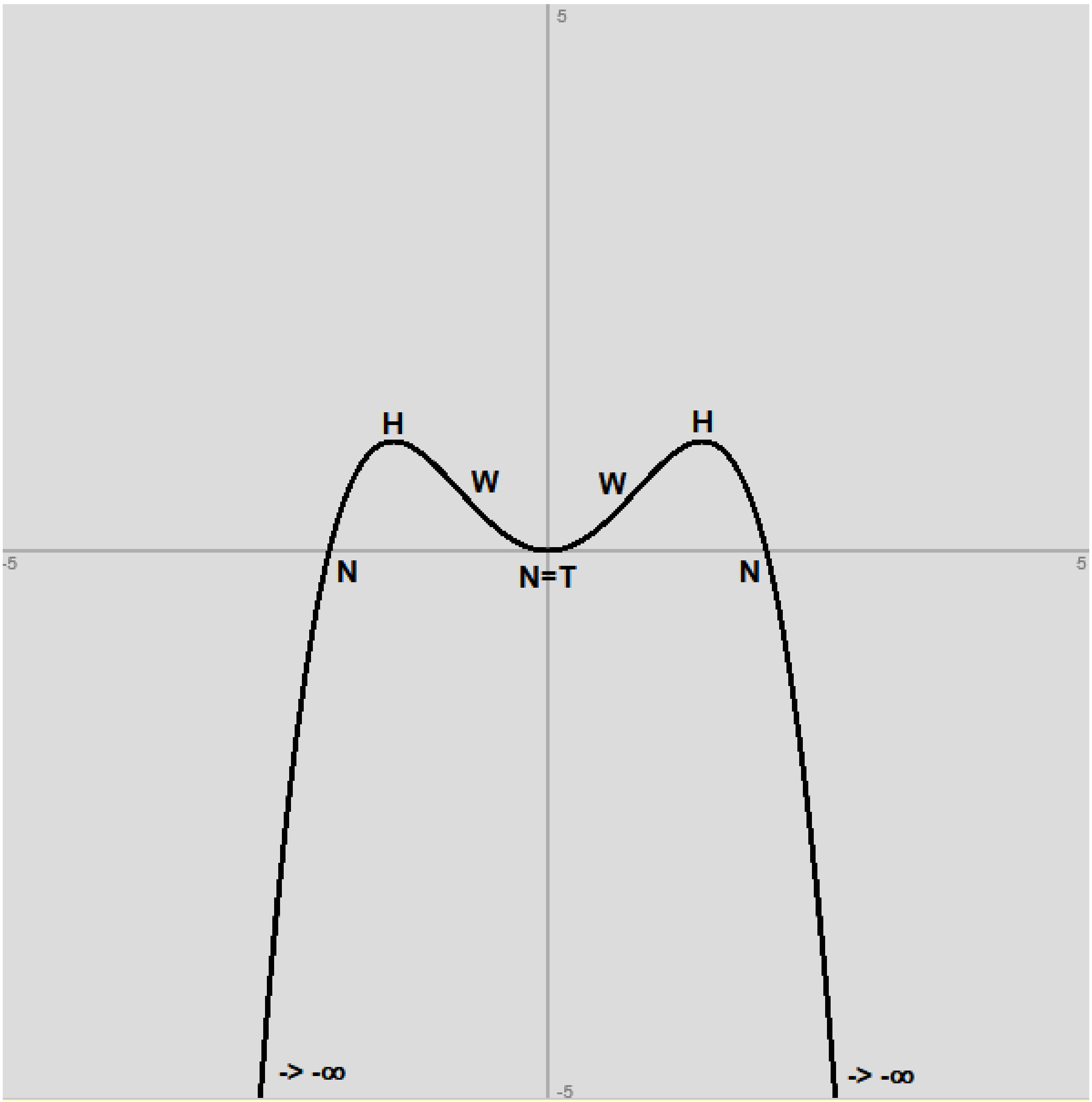
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2	0	4	-10	12	Nullstelle N(-2|0)
-1.41	1	-0.0168	-3.9643	8.46	Hochpunkt H(-1.41|1)
-0.81	0.5485	-1.0886	0.0317	4.86	Wendepunkt W(-0.81|0.55)
0	0	0	2	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
0.82	0.5594	1.0886	-0.0172	-4.92	Wendepunkt W(0.82|0.56)
1.42	0.9999	-0.0233	-4.0492	-8.52	Hochpunkt H(1.42|1)
2	0	-4	-10	-12	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Gerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> Achsensymmetrie zur y-Achse

x->-∞ => f(x) -> ∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^3$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

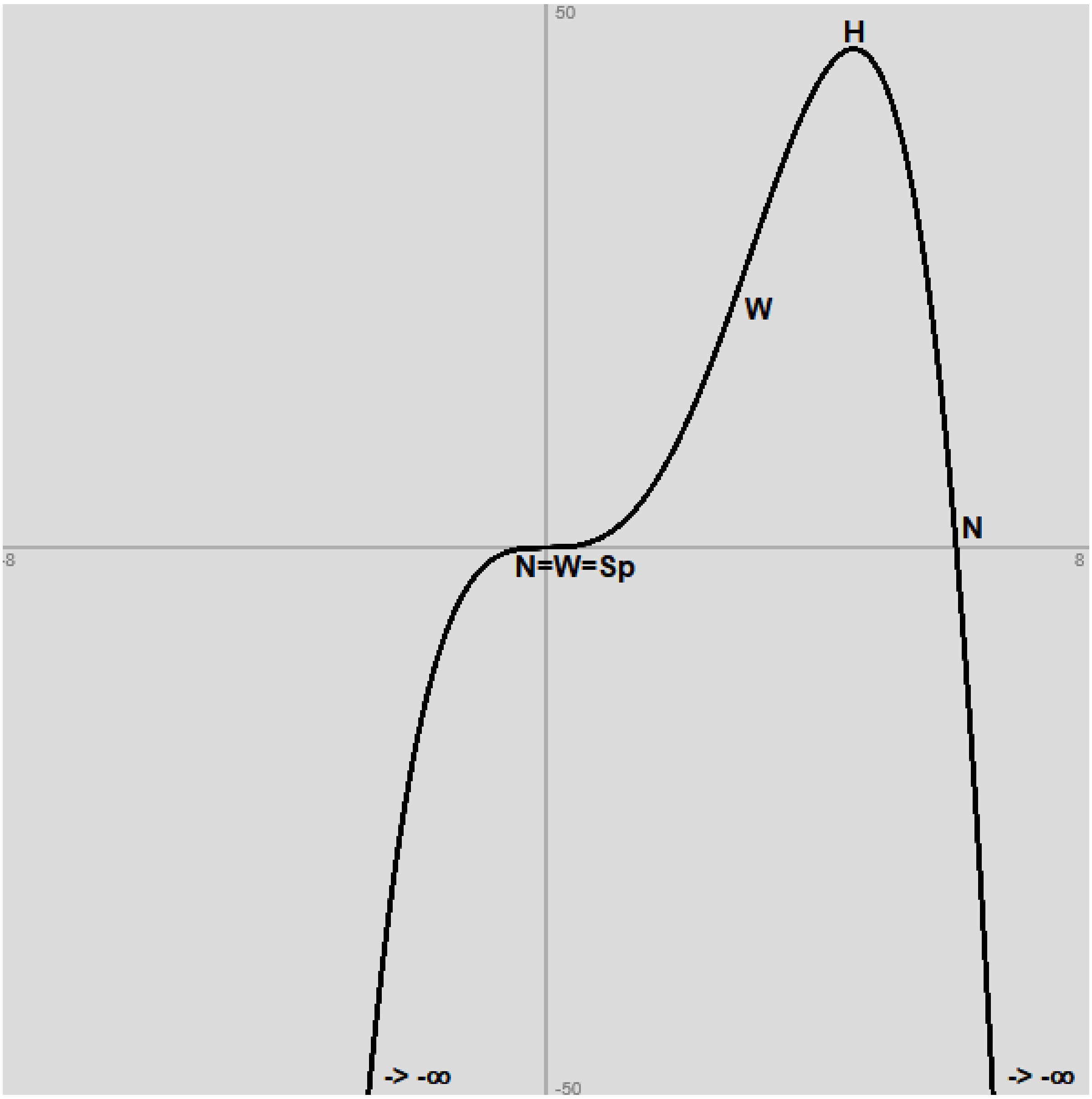
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	12	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
3	27	18	0	-12	Wendepunkt W(3|27)
4.5	45.5625	0	-27	-24	Hochpunkt H(4.5|45.56)
6	0	-72	-72	-36	Nullstelle N(6|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> ∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 2x^2$$

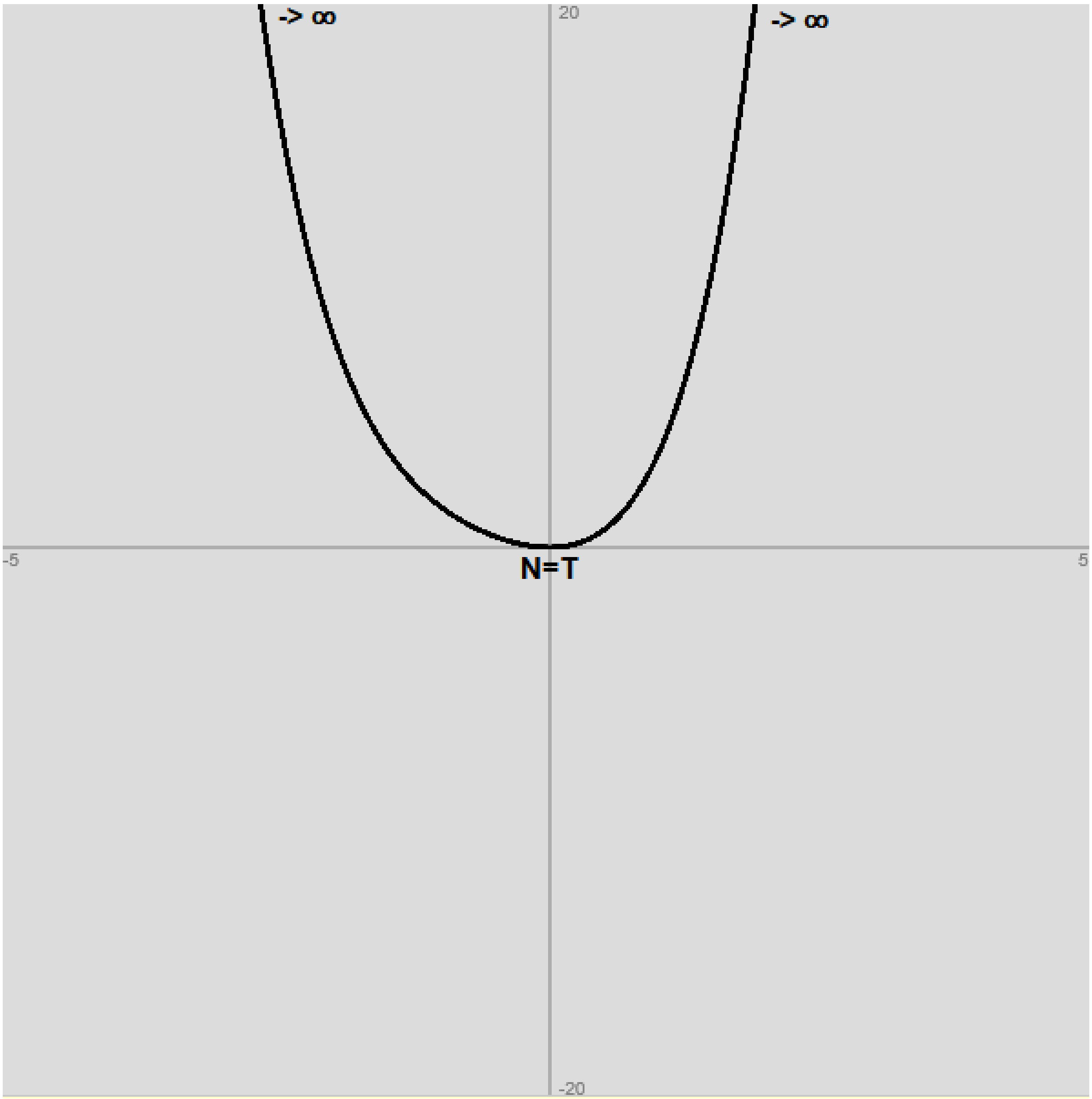
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	4	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x(x-2)^3 - 8$$

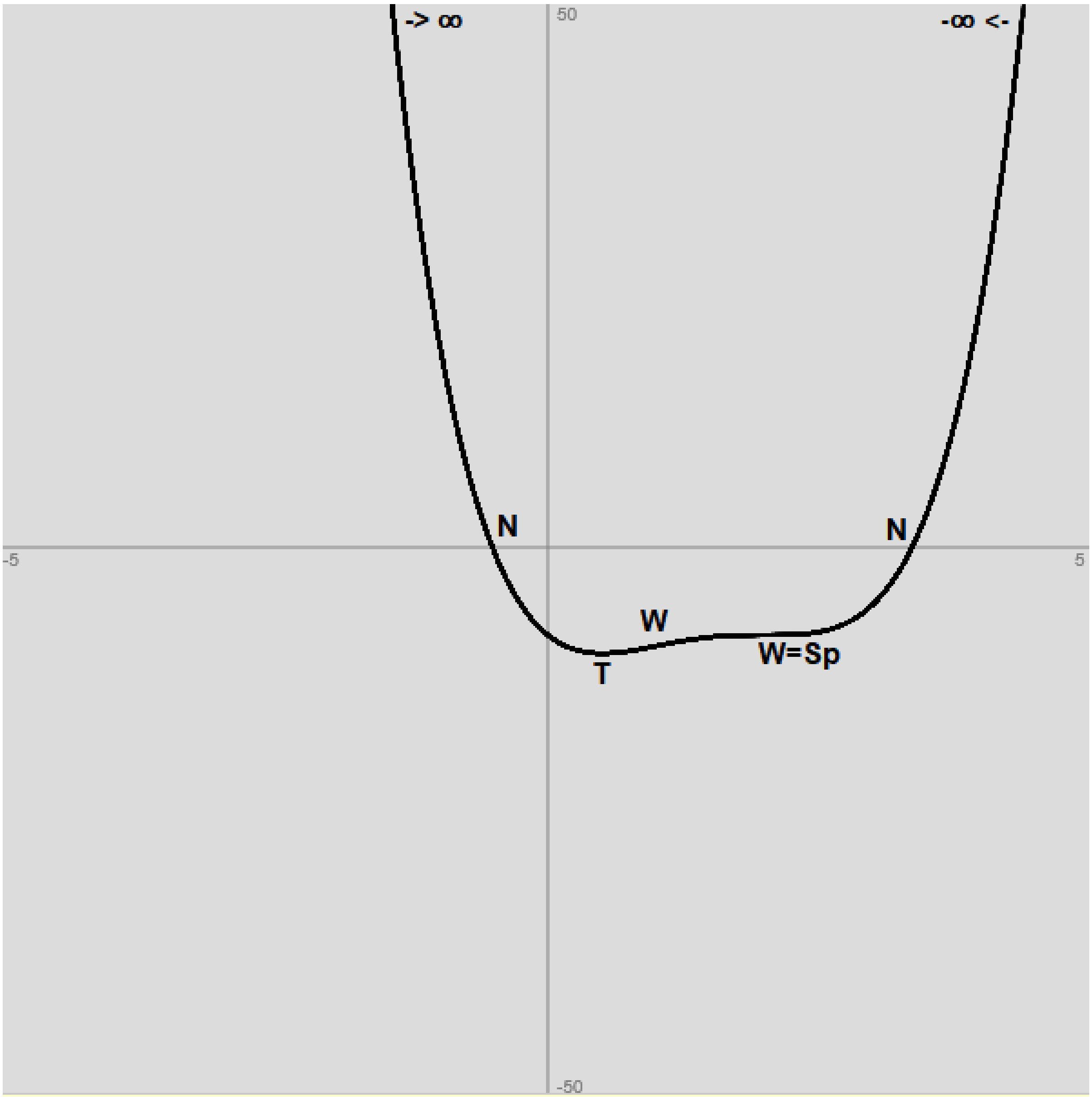
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-0.508	0.0139	-25.36	45.38	Nullstelle N(-0.51|0)
0	-8	-8	24	Schnittpunkt S_y(0|-8)
0.5	-9.6875	0	9	Tiefpunkt T(0.5|-9.69)
1	-9	2	0	Wendepunkt W(1|-9)
1.998	-8	0	-0.02	Wendepunkt W(2|-8) = Sattelpunkt W_S(2|-8)
3.338	-0.0043	20.32	37.54	Nullstelle N(3.34|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 13: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

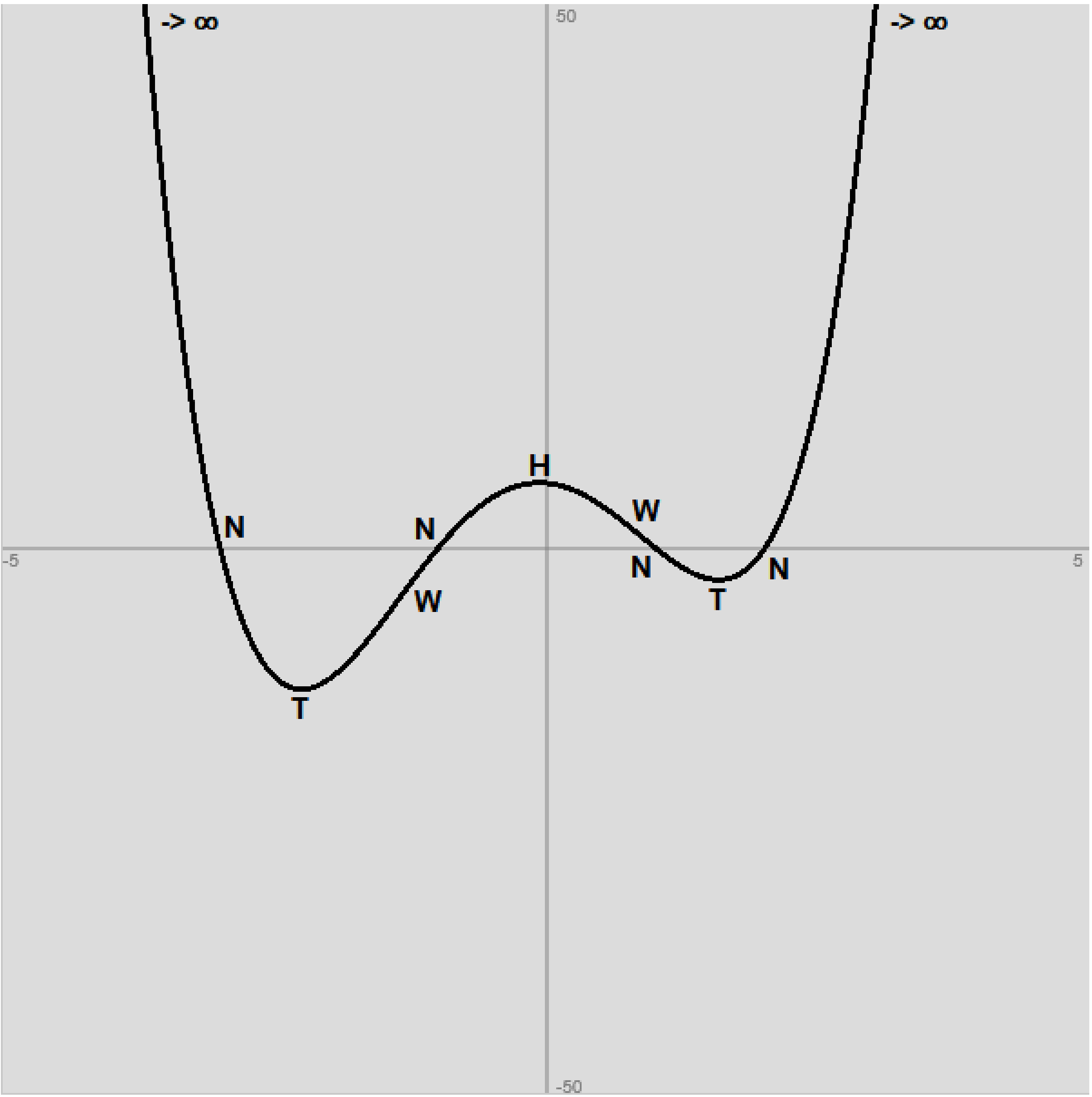
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞). **Lösung**:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	-40	76	-66	Nullstelle N(-3|0)
-2.25	-12.9492	0.125	33.25	-48	Tiefpunkt T(-2.25|-12.95)
-1.35	-4.5464	13.526	-0.23	-26.4	Wendepunkt W(-1.35|-4.55)
-1	0	12	-8	-18	Nullstelle N(-1|0)
-0.07	6.0354	-0.0067	-14.3612	4.32	Hochpunkt H(-0.07|6.04)
0	6	-1	-14	6	Schnittpunkt S_y(0|6)
0.86	1.1459	-8.277	0.0352	26.64	Wendepunkt W(0.86|1.15)
1	0	-8	4	30	Nullstelle N(1|0)
1.58	-2.8785	0.1464	25.4368	43.92	Tiefpunkt T(1.58|-2.88)
2	0	15	46	54	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 14: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 4x^2 - \frac{1}{2}x^5$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

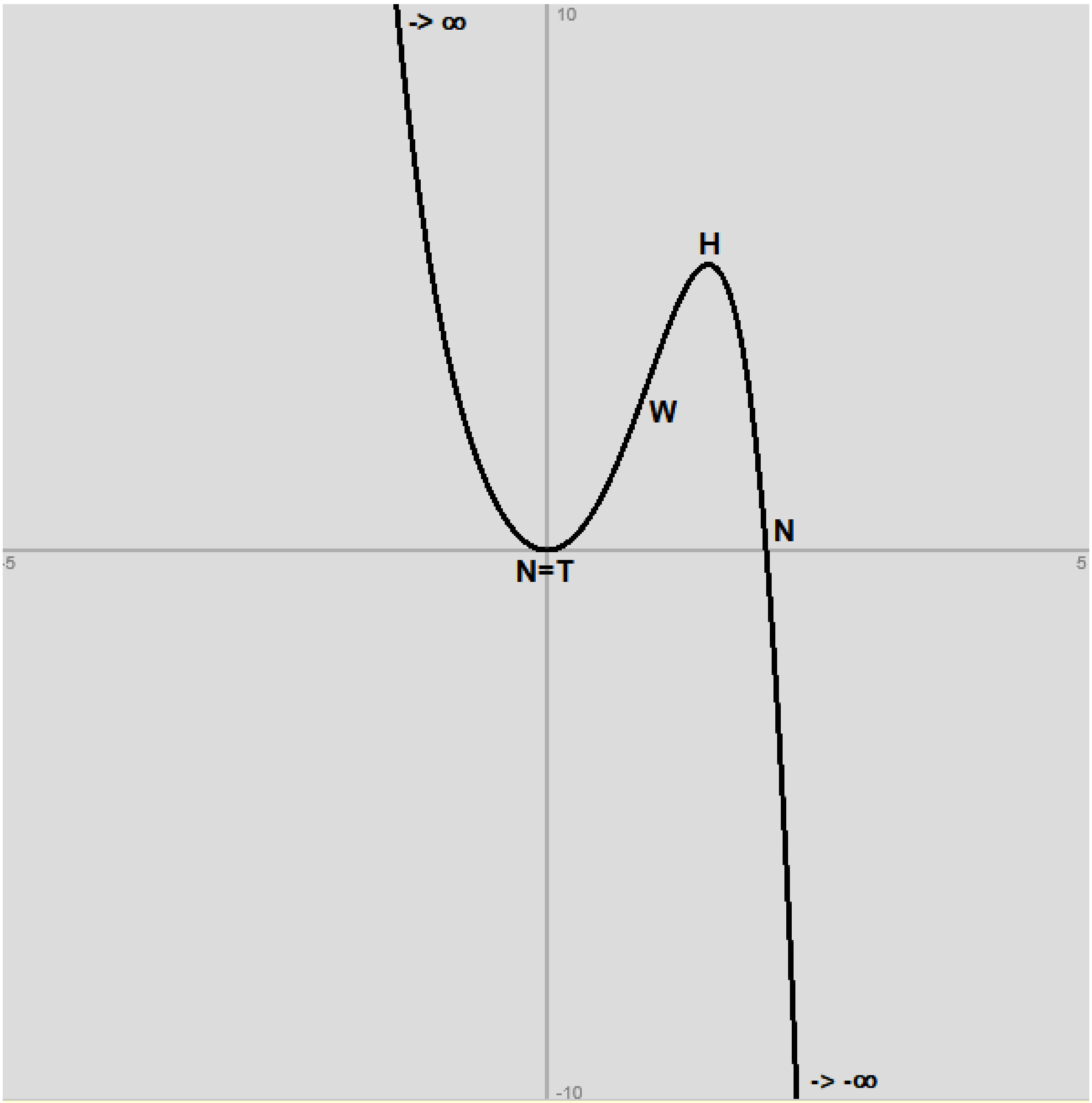
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	8	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
0.93	3.1118	5.5699	-0.0436	-25.947	Wendepunkt W(0.93|3.11)
1.48	5.2112	-0.1546	-24.4179	-65.712	Hochpunkt H(1.48|5.21)
2	0	-24	-72	-120	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 15: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 20x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

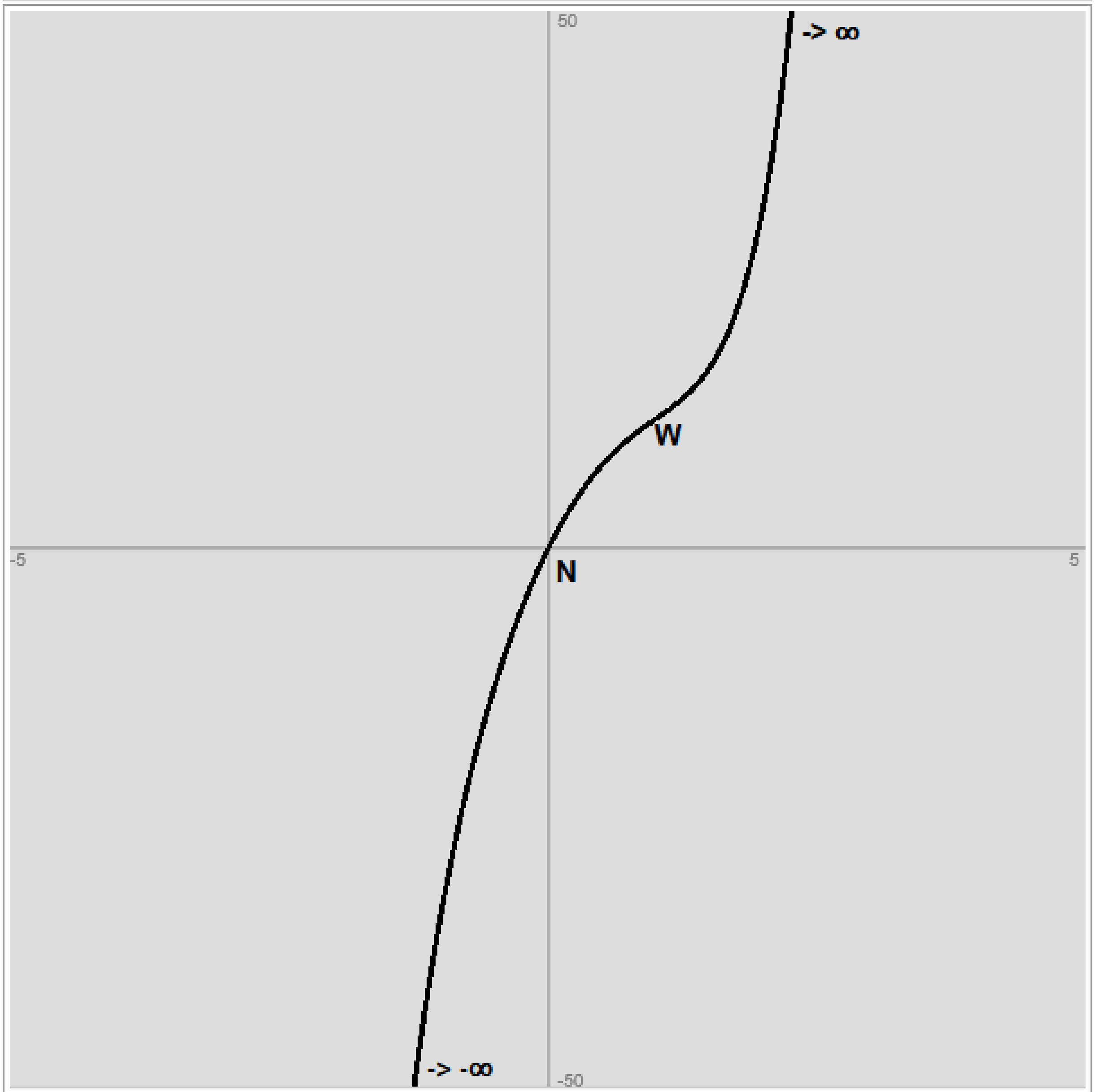
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	20	-20	12	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1	12	7	0	48	Wendepunkt W(1|12)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 16: Untersuche die Funktion

$$f(x) = (x^3 - 8)(x^2 - 16)$$

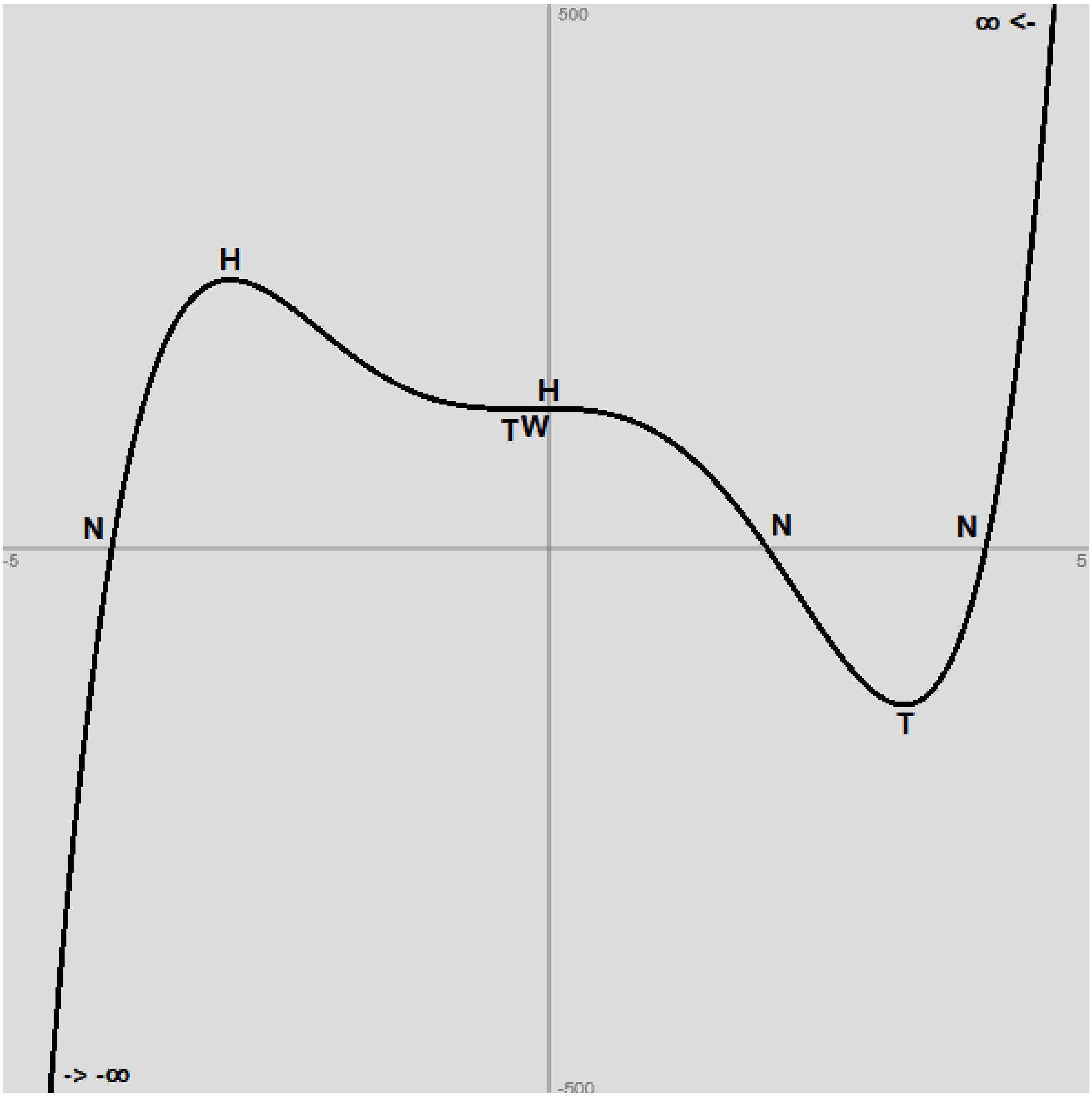
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	0	576	-912	Nullstelle N(-4|0)
-2.916	245.8616	0.02	-231.96	Hochpunkt H(-2.92|245.86)
-2.104	200.3783	-80.84	-0.3	Wendepunkt W(-2.1|200.38)
-0.338	127.6995	-0.01	15.68	Tiefpunkt T(-0.34|127.7)
-0.168	127.8499	1.34	0.03	Wendepunkt W(-0.17|127.85)
0	128	0	-16	Schnittpunkt S_y(0|128) = Hochpunkt H(0|128)
2	0	-144	-48	Nullstelle N(2|0)
2.268	-39.8008	-150.9	-0.4	Wendepunkt W(2.27|-39.8)
3.252	-143.1608	-0.45	359.64	Tiefpunkt T(3.25|-143.16)
4	0	448	880	Nullstelle N(4|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden
x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 17: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 5x$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

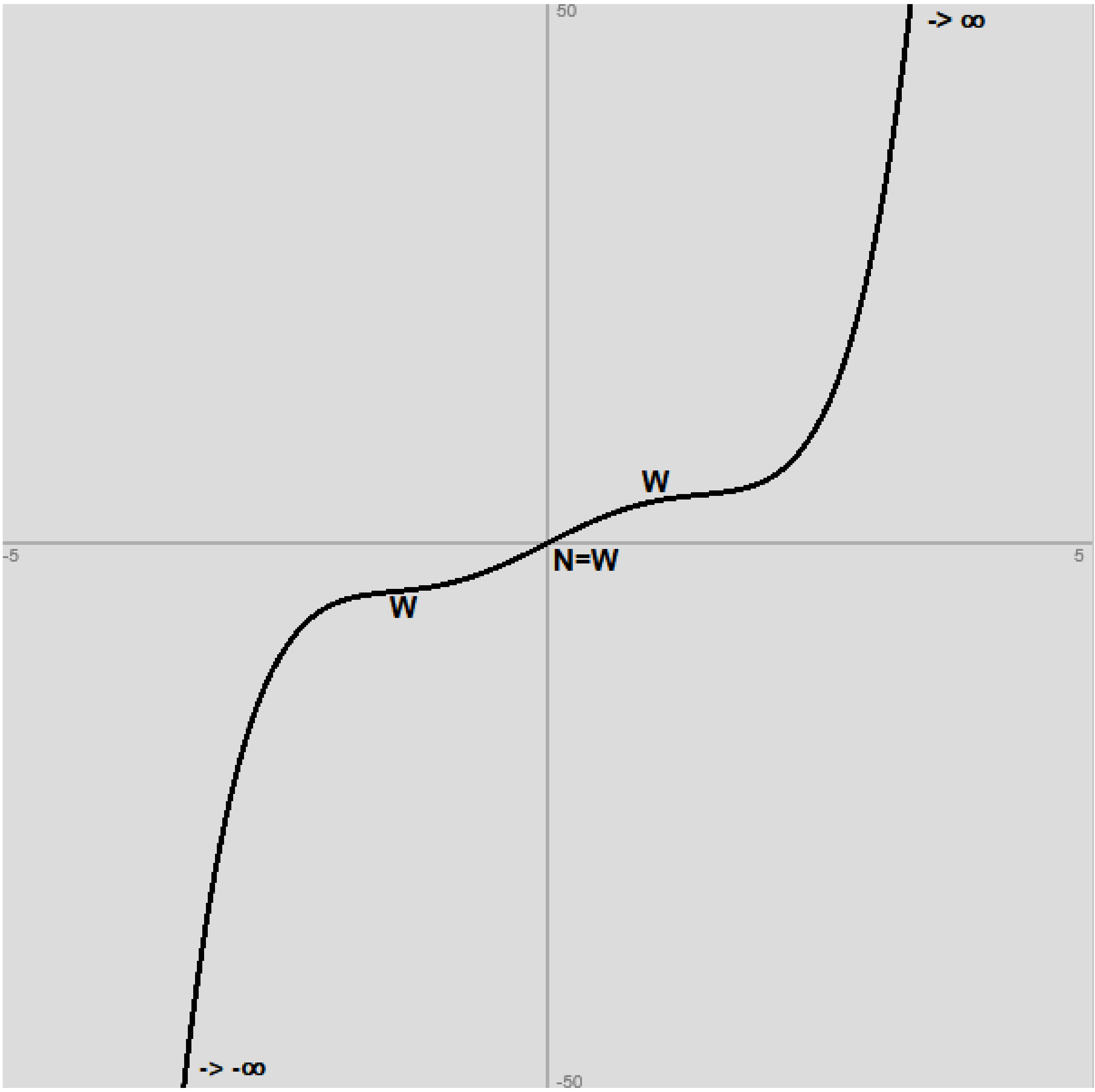
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.41	-4.427	1.0001	0.0671	15.8572	Wendepunkt W(-1.41|-4.43)
0	0	5	0	-8	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
1.42	4.437	1.0003	0.0932	16.1968	Wendepunkt W(1.42|4.44)

Graph:



Ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 18: Untersuche die Funktion

$$f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)x^3(x-3)$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

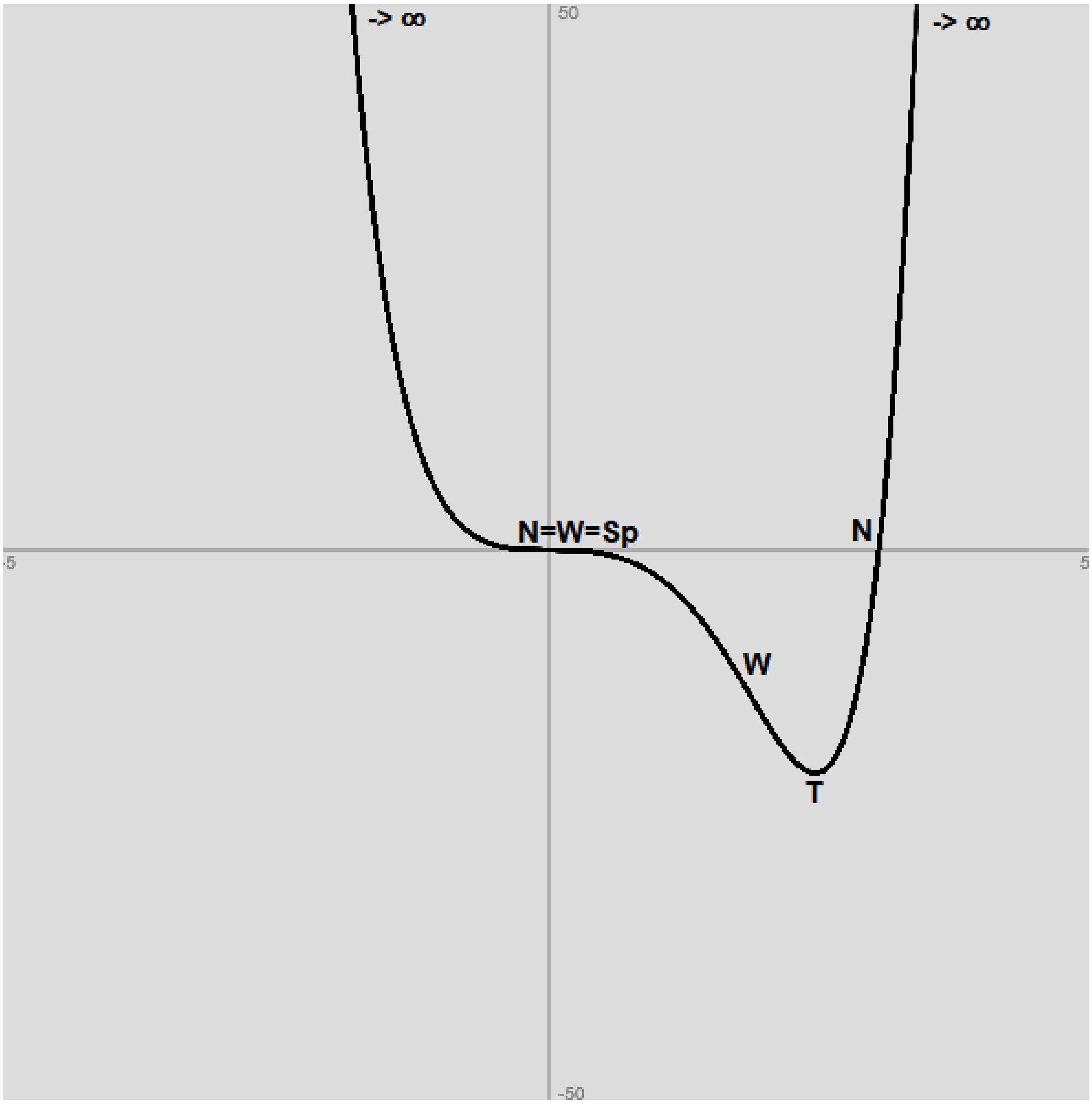
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
1.838	-13.3087	-16.9	-0.09	Wendepunkt W(1.84|-13.31)
2.42	-20.255	-0.13	71.36	Tiefpunkt T(2.42|-20.26)
3	0	87.75	256.5	Nullstelle N(3|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 19: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^4\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$$

auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

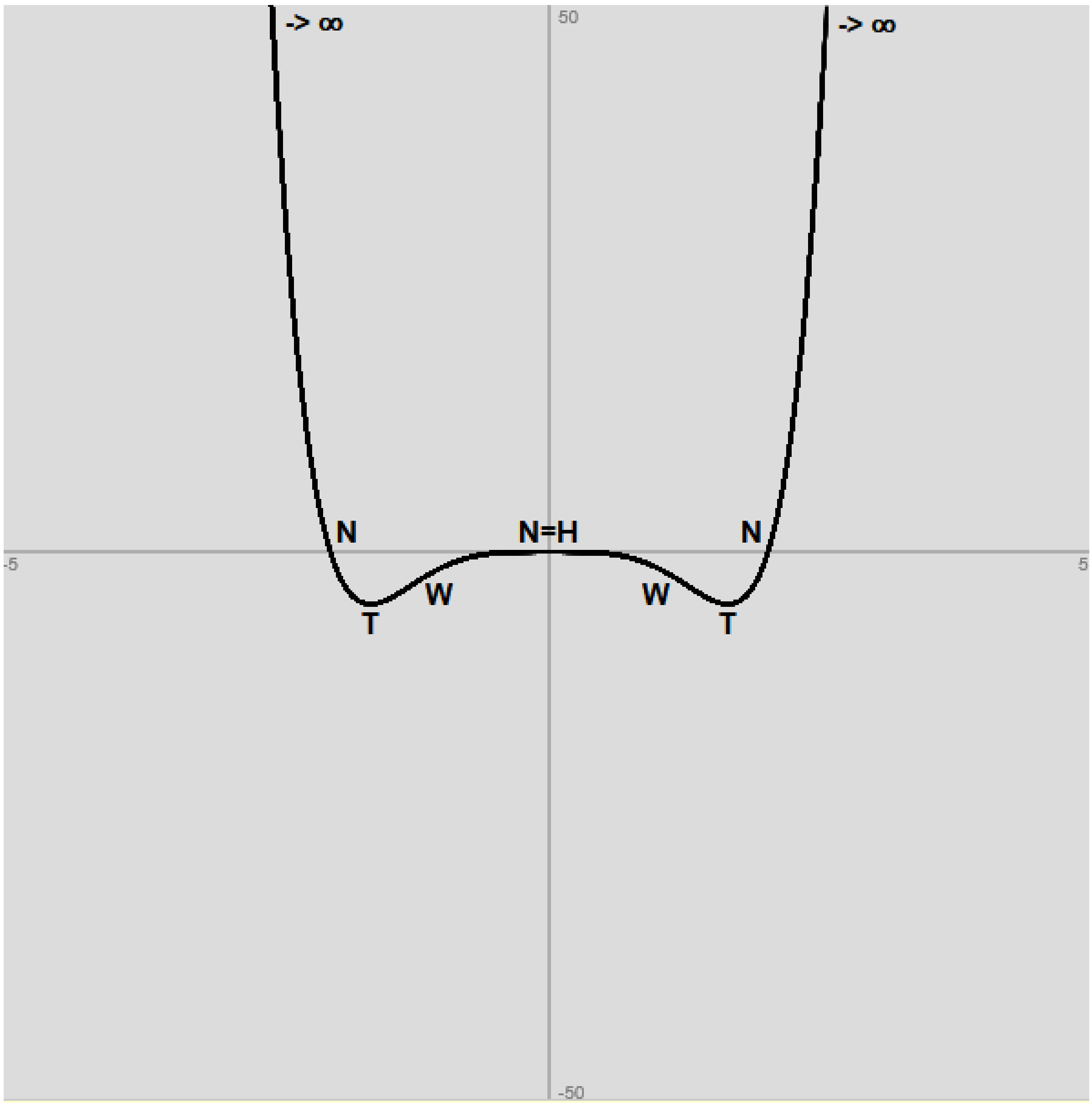
Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-32	144	Nullstelle N(-2|0)
-1.634	-4.7407	-0.04	42.85	Tiefpunkt T(-1.63|-4.74)
-1.266	-3.0791	6.48	0.07	Wendepunkt W(-1.27|-3.08)
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1.264	-3.0661	-6.48	-0.06	Wendepunkt W(1.26|-3.07)
1.632	-4.7407	-0.04	42.49	Tiefpunkt T(1.63|-4.74)
2	0	32	144	Nullstelle N(2|0)

Graph:



f(-x) = f(x) -> Achsensymmetrie zur y-Achse
x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 20: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^6 + 2x^5 - 23x^4 - 40x^3 + 124x^2 + 128x - 192}{10}$$

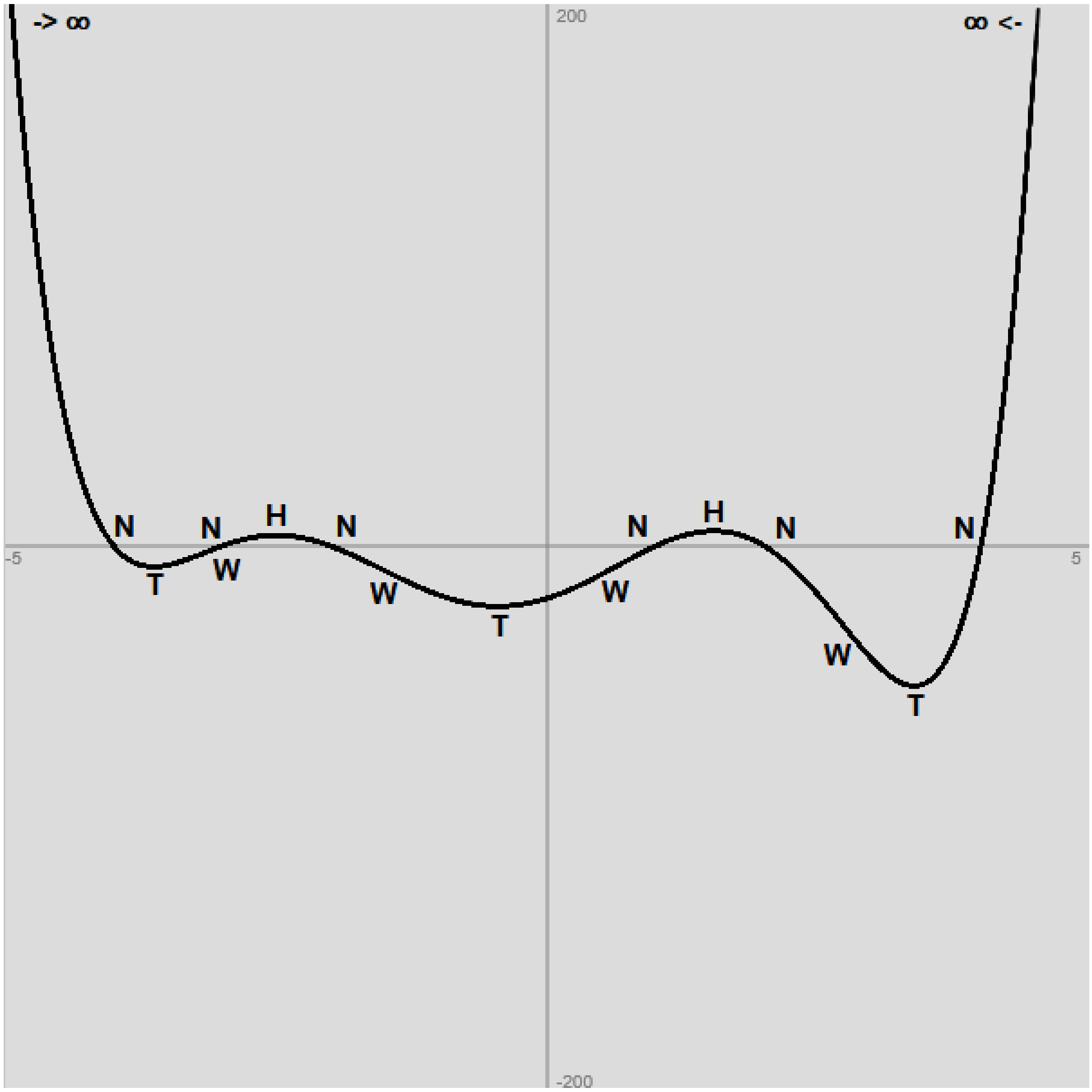
auf: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Symmetrie und Verhalten für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Es sind die Punkte der Kurvendiskussion abzuhandeln gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise (f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte; f(-x) = ±f(x) -> Achsen-/Punktsymmetrie; x-> ±∞ => f(x) -> ±∞).

Lösung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	0	-48.01	191.2	Nullstelle N(-4|0)
-3.64	-7.5547	-0.62	80.22	Tiefpunkt T(-3.64|-7.55)
-3.18	-2.7077	15.58	0.17	Wendepunkt W(-3.18|-2.71)
-3	0	14	-16.6	Nullstelle N(-3|0)
-2.5	3.8391	0.02	-33.01	Hochpunkt H(-2.5|3.84)
-2	0	-14.4	-21.6	Nullstelle N(-2|0)
-1.51	-8.825	-19.84	-0.07	Wendepunkt W(-1.51|-8.82)
-0.46	-22.181	-0.22	29.74	Tiefpunkt T(-0.46|-22.18)
0	-19.2	12.8	24.8	Schnittpunkt S_y(0|-19.2)
0.63	-7.5508	21.58	0.2	Wendepunkt W(0.63|-7.55)
1	0	18	-19.8	Nullstelle N(1|0)
1.53	5.4409	0.21	-45.76	Hochpunkt H(1.53|5.44)
2	0	-24	-53.6	Nullstelle N(2|0)
2.71	-28.2634	-49.59	-1.52	Wendepunkt W(2.71|-28.26)
3.38	-51.5831	-0.51	174.38	Tiefpunkt T(3.38|-51.58)
4	0	201.61	511.21	Nullstelle N(4|0)

Graph:



Gerade und ungerade Exponenten der Potenzen im Funktionsterm -> keine Symmetrie vorhanden

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

www.michael-buhlmann.de / 08.2017 / Mathematik-Aufgabenpool: Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen / Aufgaben 416-435