Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Besondere Kurvenpunkte (Nullstellen) bei ganz rationalen Funktionen I

Einleitung: Ganz rationale Funktionen f: **R** -> **R** besitzen den Funktionsterm: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ (für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n; $a_n \neq 0$). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. In besonderen Fällen lassen sich ganz rationale Funktion f(x) skizzieren, wenn nur die Nullstellen und das Verhalten für x->-∞ bzw. x->∞, eventuell noch die Symmetrie (Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems, Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems) bekannt ist:

Besondere Kurvenpunkte (Nullstellen)
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel). Das Ermitteln der Lösungen der (Polynom-) Gleichung: f(x) = 0 erfolgt gemäß:
Ia. Lineare Gleichung: ax+b = 0 ⇔ x = -b/a
Ib. Rein quadratische Gleichung: $ax^2+c = 0$ ⇔ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
Ic. Gemischt quadratische Gleichung: $x^2+px+q = 0$ ⇔ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Id. Gemischt quadratische Gleichung: $ax^2+bx+c = 0$ ⇔ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Ie. Ausklammern: $ax^n+…+bx^m = 0$ ⇔ $x^m(ax^{n-m}+…+b) = 0$ ⇔ x=0, $ax^{n-m}+…+b = 0$
If. Polynomdivison: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + … + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + … + b_1x + b_0) = 0$ mit x_0 als Lösung der Gleichung: f(x) = 0 (Ermittlung von x_0 u.a. als Teiler von a_0 bei Ganzzahligkeit von Lösungen)
Ig. Substitution: $ax^4+bx^2+c = 0$, $z=x^2$ ⇔ $az^2+bz+c =0$ ⇔ $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ⇔ $x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$ (falls $z_1, z_2 \geq 0$)
Ih. Substitution: $ax^6+bx^3+c = 0$, $z=x^3$ ⇔ $az^2+bz+c =0$ ⇔ $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ⇔ $x = \sqrt[3]{z_1}$, $x = \sqrt[3]{z_2}$
II. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):
III. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade)

$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Besondere Kurvenpunkte (Nullstellen) bei ganz rationalen Funktionen

Unter besonderen Voraussetzungen lassen sich ganz rationale Funktionen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ als Produkte von Linearfaktoren $f(x) = a_n (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-x_m)^{k_m}$ mit $k_1+k_2+…+k_m = m$ (k_1, k_2, … k_m als Nullstellenvielfachheiten) darstellen (Linearfaktorzerlegung, Produktform), so dass laut dem Satz vom Nullprodukt aus:

f(x) = 0 ⇔ $a_n (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-x_m)^{k_m} = 0$ ⇔ $x=x_1$, $x=x_2$, … $x=x_m$

sofort die Nullstellen N(x_1|0), N(x_2|0), … N(x_m|0) der Funktion f(x) folgen.

Aufgabe 1: Skizziere die Funktion

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

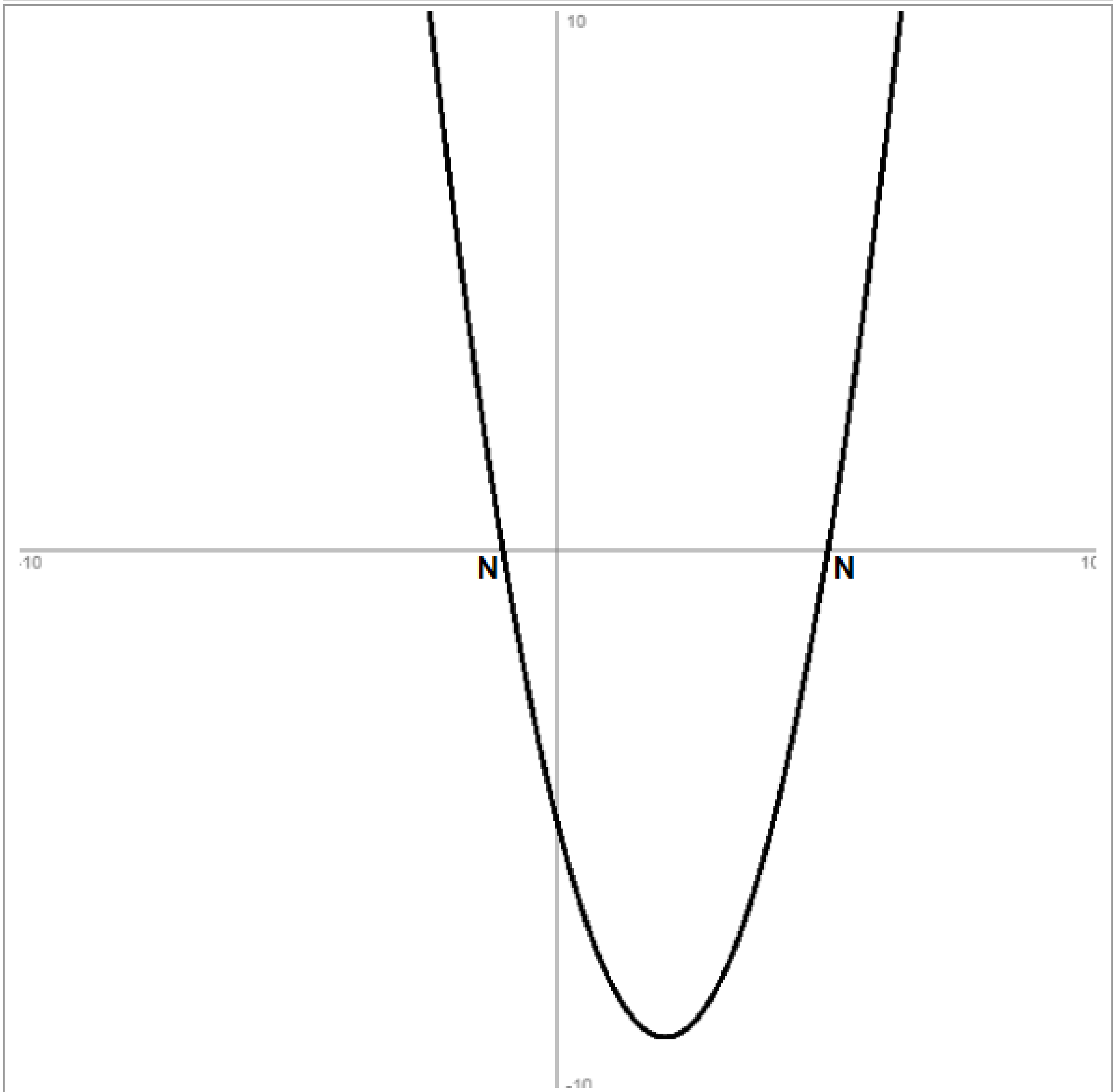
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	-6	2	0	Nullstelle N(-1|0)
0	-5	-4	2	0	Schnittpunkt S_y(0|-5)
2	-9	0	2	0	Tiefpunkt T(2|-9)
5	0	6	2	0	Nullstelle N(5|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 2: Skizziere die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

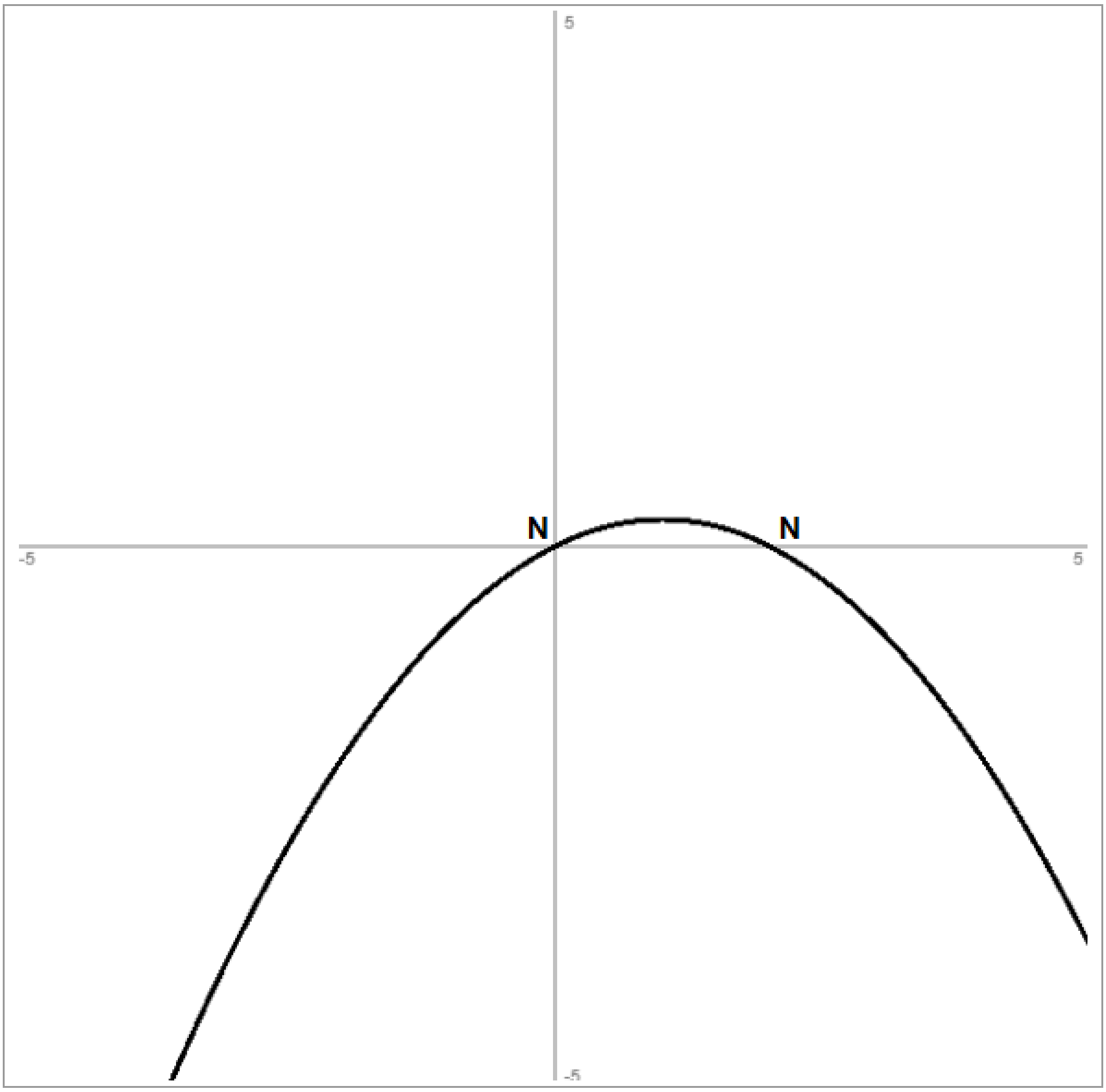
unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0.5	-0.5	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1	0.25	0	-0.5	0	Hochpunkt H(1|0.25)
2	0	-0.5	-0.5	0	Nullstelle N(2|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 3: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{10} x^2 (x-6)$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

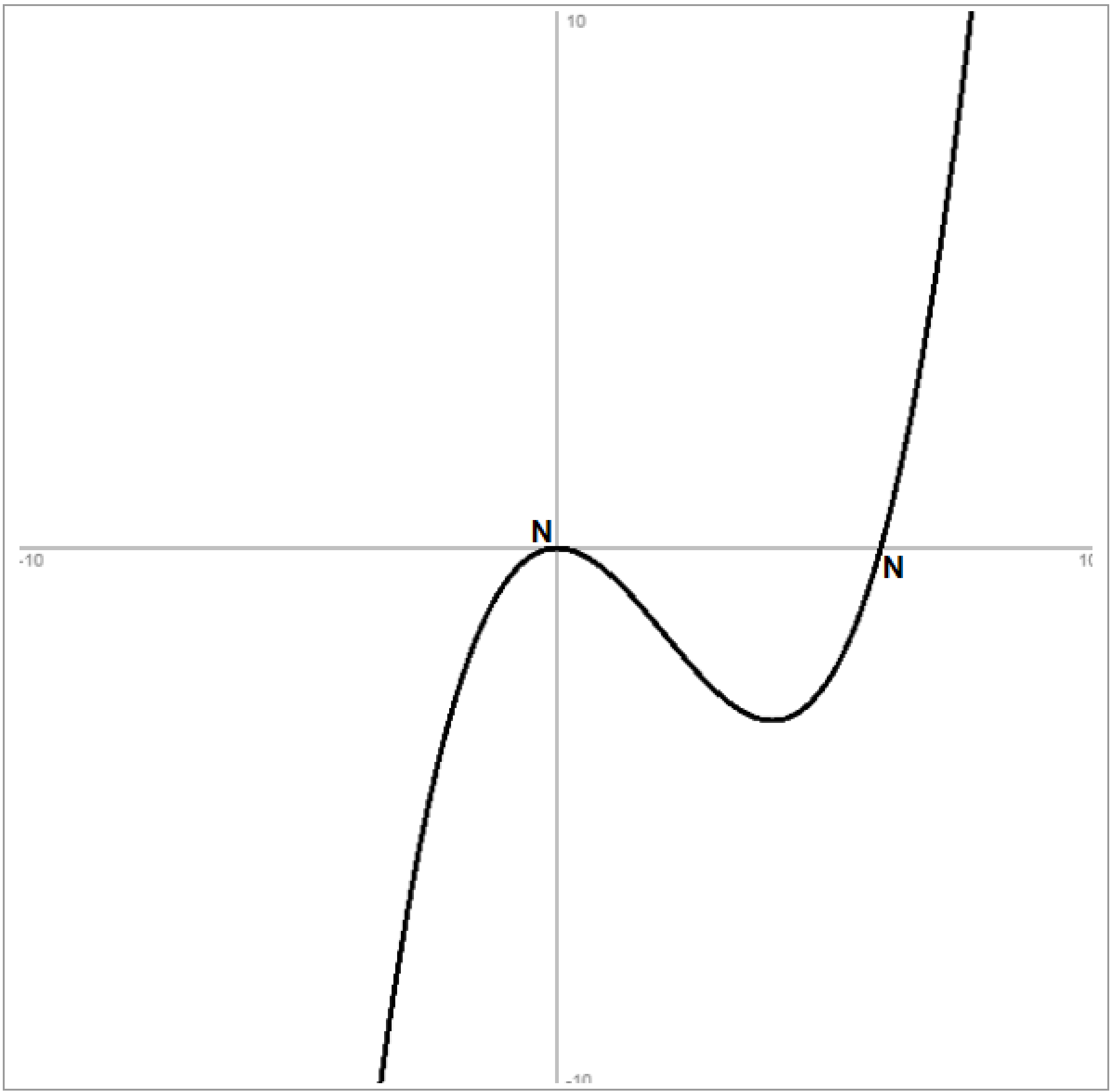
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	-1.2	0.6	Doppelte Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
2	-1.6	-1.2	0	0.6	Wendepunkt W(2|-1.6)
4	-3.2	0	1.2	0.6	Tiefpunkt T(4|-3.2)
6	0	3.6	2.4	0.6	Nullstelle N(6|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 4: Skizziere die Funktion

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

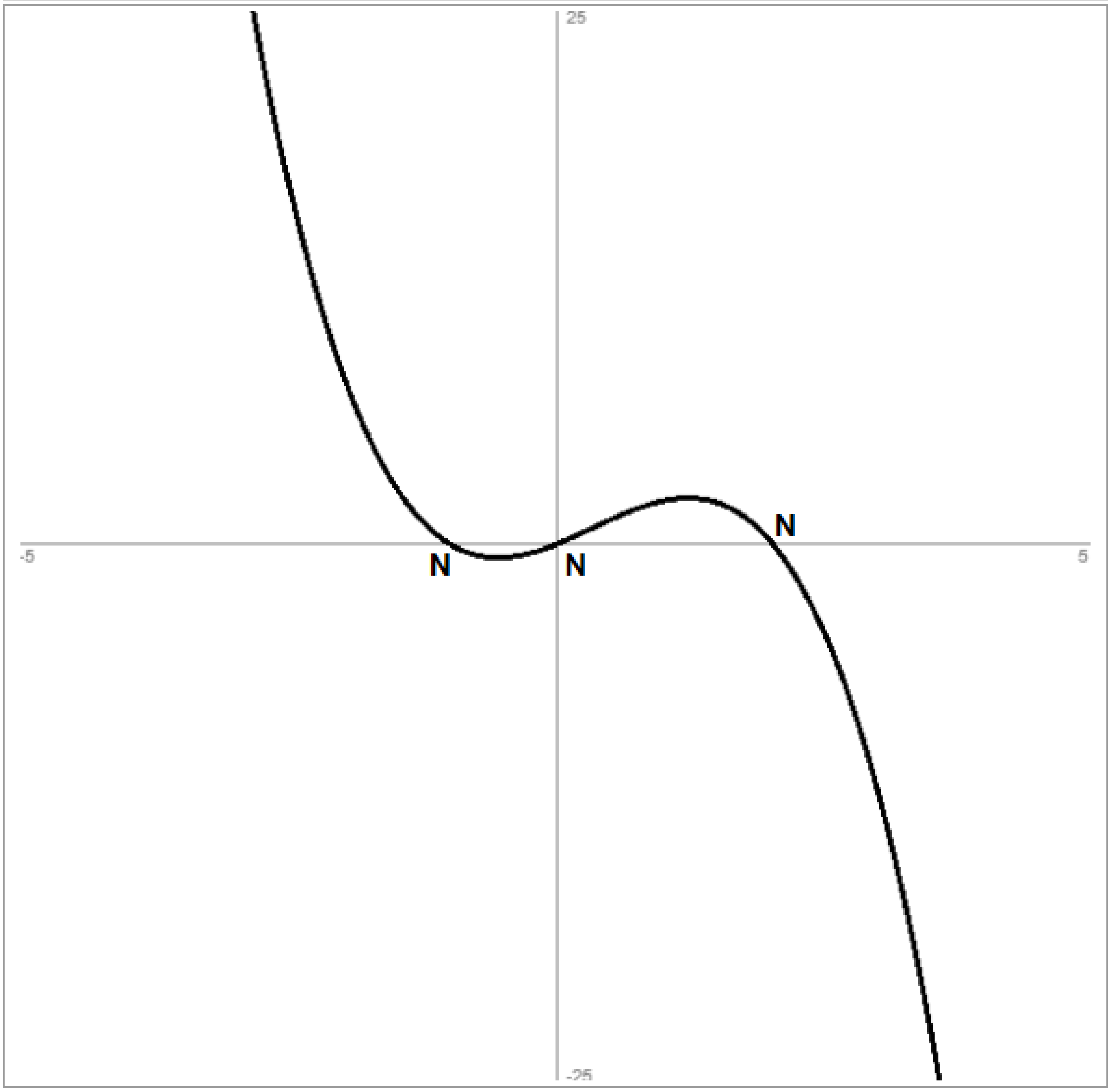
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	-3	8	-6	Nullstelle N(-1|0)
-0.54	-0.6309	0.0452	5.24	-6	Tiefpunkt T(-0.54|-0.63)
0	0	2	2	-6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.34	0.7563	2.3332	-0.04	-6	Wendepunkt W(0.34|0.76)
1.22	2.1126	-0.0252	-5.32	-6	Hochpunkt H(1.22|2.11)
2	0	-6	-10	-6	Nullstelle N(2|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 5: Skizziere die Funktion

$$f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung der Symmetrie und des Verhaltens für betragsmäßig große x.

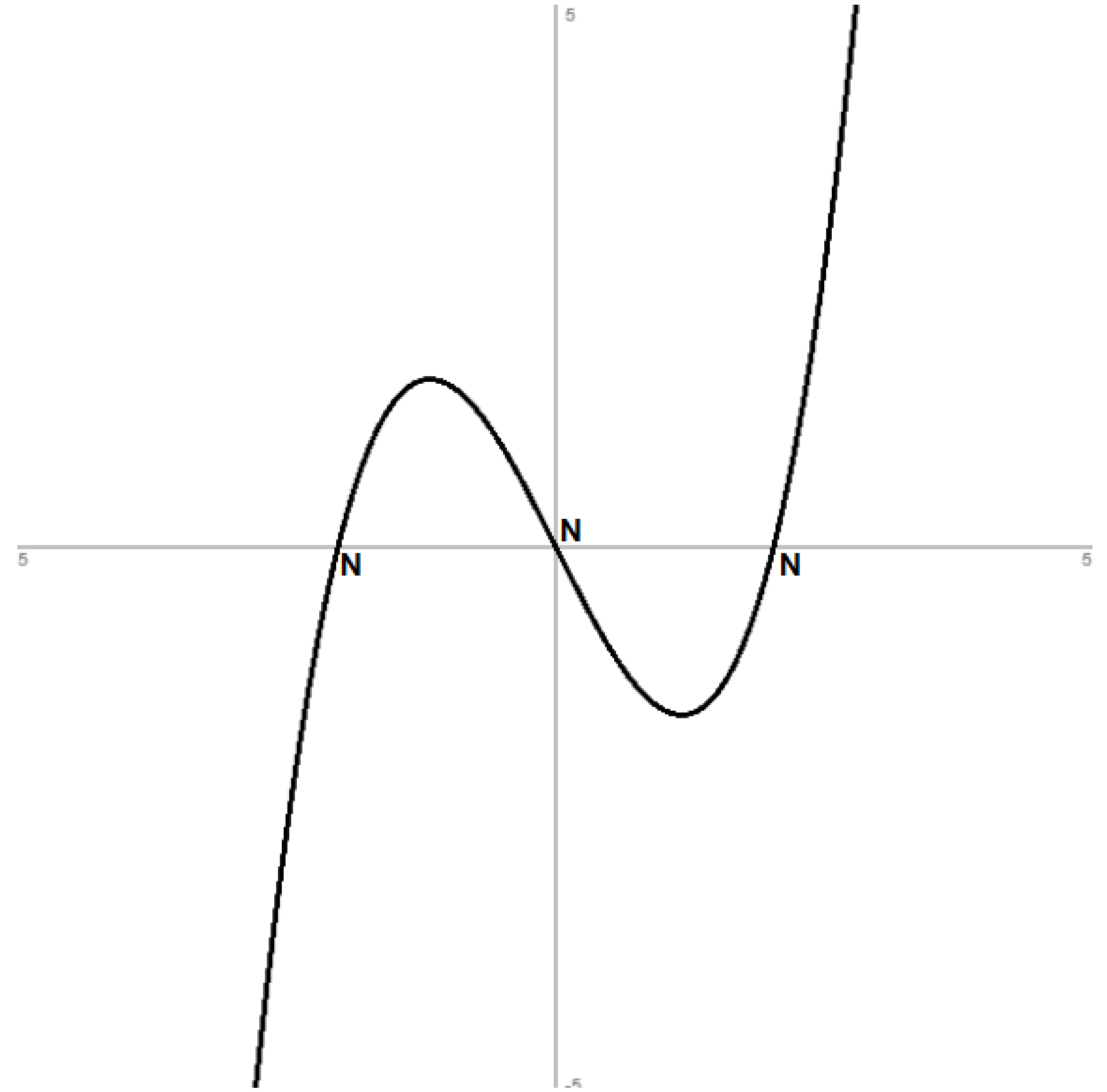
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞. Zusätzlich ist hier auf die Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems oder die Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems zu achten.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	4	-6	3	Nullstelle N(-2|0)
-1.15	1.5396	-0.0162	-3.45	3	Hochpunkt H(-1.15|1.54)
0	0	-2	0	3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
1.16	-1.5396	0.0184	3.48	3	Tiefpunkt T(1.16|-1.54)
2	0	4	6	3	Nullstelle N(2|0)

Graph:



f(-x) = f(x) => Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 6: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung der Symmetrie und des Verhaltens für betragsmäßig große x.

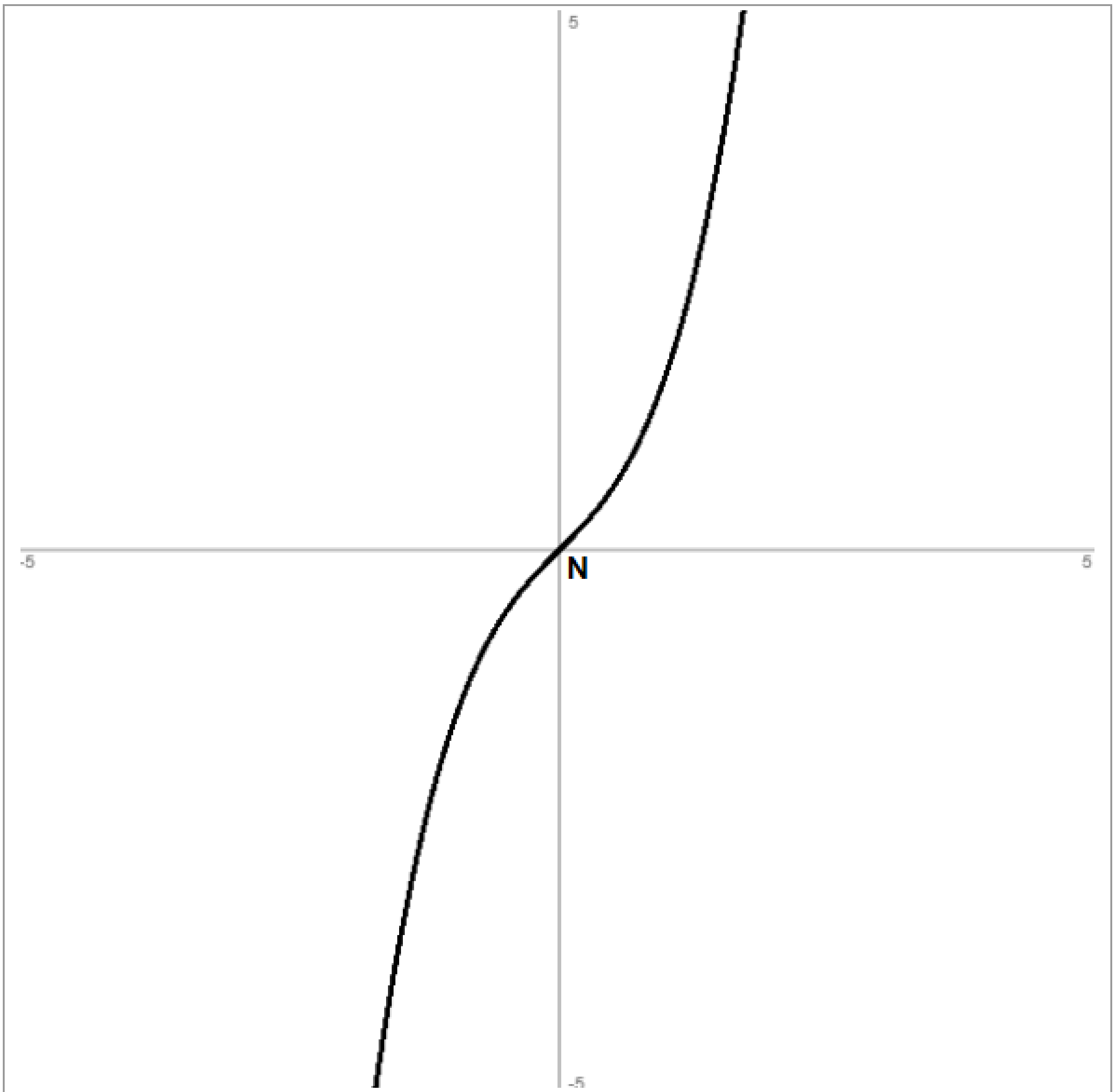
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞. Zusätzlich ist hier auf die Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems oder die Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems zu achten.

Lösung:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	1	0	4	Nullstelle N(-2|0)

Graph:



f(-x) = f(x) => Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0)

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 7: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3(x+5)$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

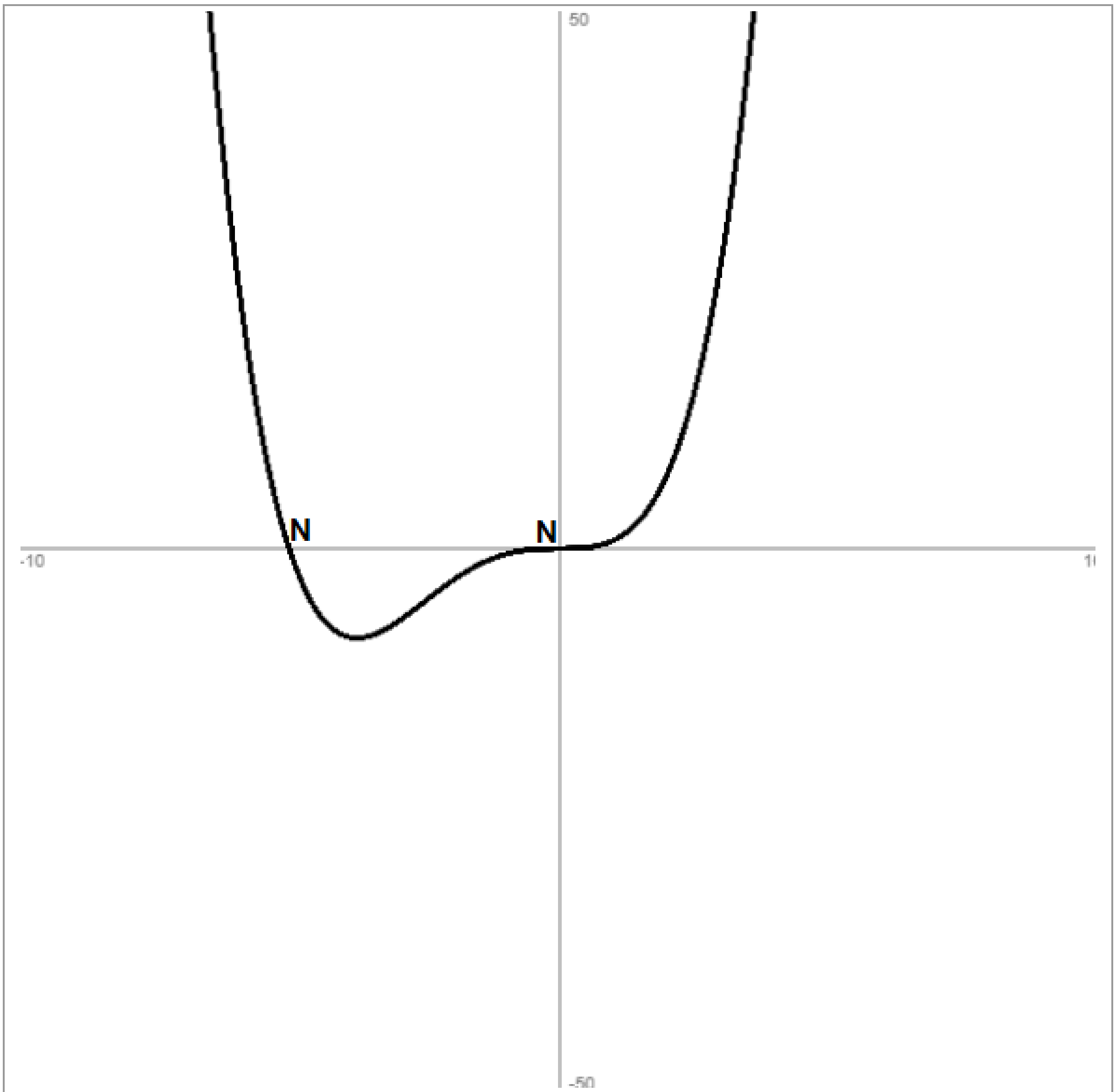
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	0	-15.625	18.75	-11.25	Nullstelle N(-5|0)
-3.75	-8.2397	0	7.0313	-7.5	Tiefpunkt T(-3.75|-8.24)
-2.5	-4.8828	3.9063	0	-3.75	Wendepunkt W(-2.5|-4.88)
0	0	0	0	3.75	Dreifache Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 8: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x^4 - 20x^2 + 64\right)$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung der Symmetrie und des Verhaltens für betragsmäßig große x.

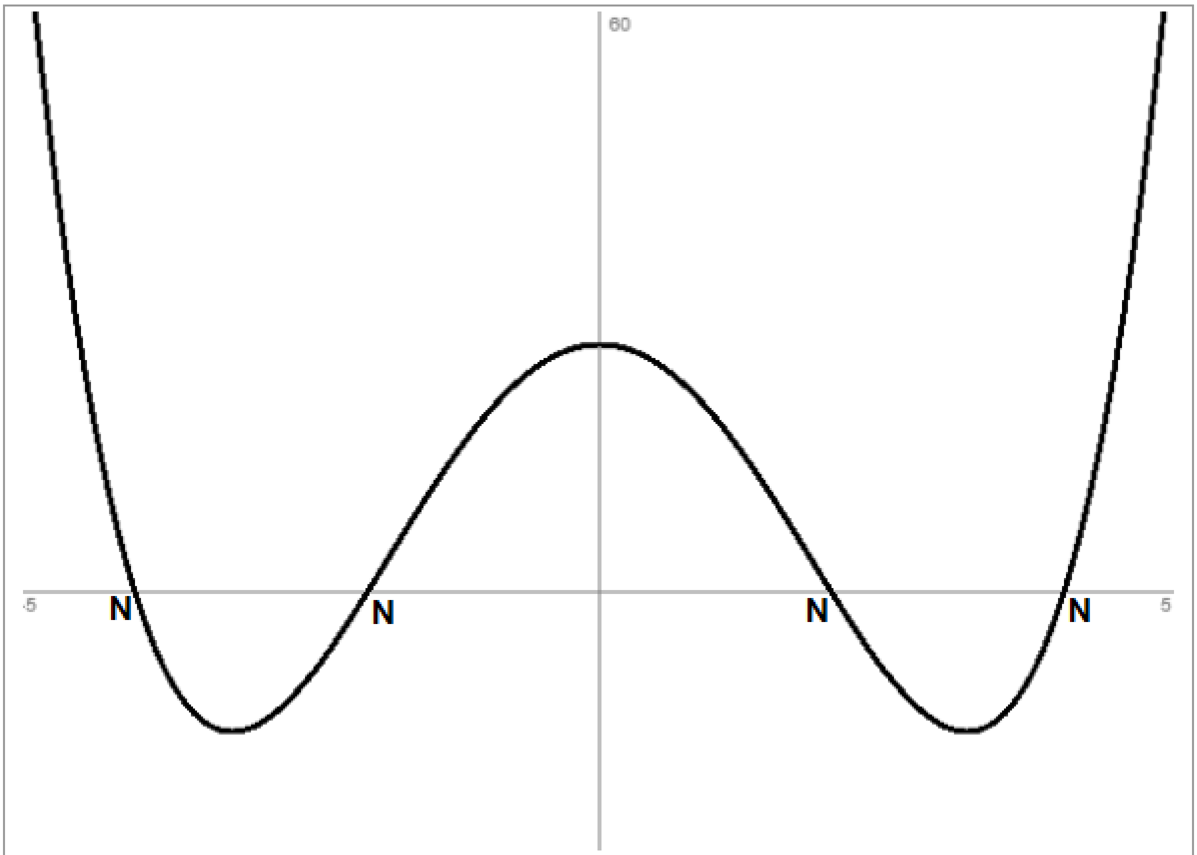
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞. Zusätzlich ist hier auf die Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems oder die Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems zu achten.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	-38.4	60.8	-38.4	Nullstelle N(-4|0)
-3.16	-14.399	0.0728	31.9309	-30.336	Tiefpunkt T(-3.16|-14.4)
-2	0	19.2	3.2	-19.2	Nullstelle N(-2|0)
-1.82	3.4896	19.4743	-0.1005	-17.472	Wendepunkt W(-1.82|3.49)
0	25.6	0	-16	0	Schnittpunkt S_y(0|25.6) = Hochpunkt H(0|25.6)
1.83	3.2949	-19.4744	0.0747	17.568	Wendepunkt W(1.83|3.29)
2	0	-19.2	3.2	19.2	Nullstelle N(2|0)
3.17	-14.399	0.248	32.2347	30.432	Tiefpunkt T(3.17|-14.4)
4	0	38.4	60.8	38.4	Nullstelle N(4|0)

Graph:



f(-x) = f(x) => Achsensymmetrie zur y-Achse

x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 9: Skizziere die Funktion

$$f(x) = -\frac{5}{12}\left(x^2 - 9\right)^2$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung der Symmetrie und des Verhaltens für betragsmäßig große x.

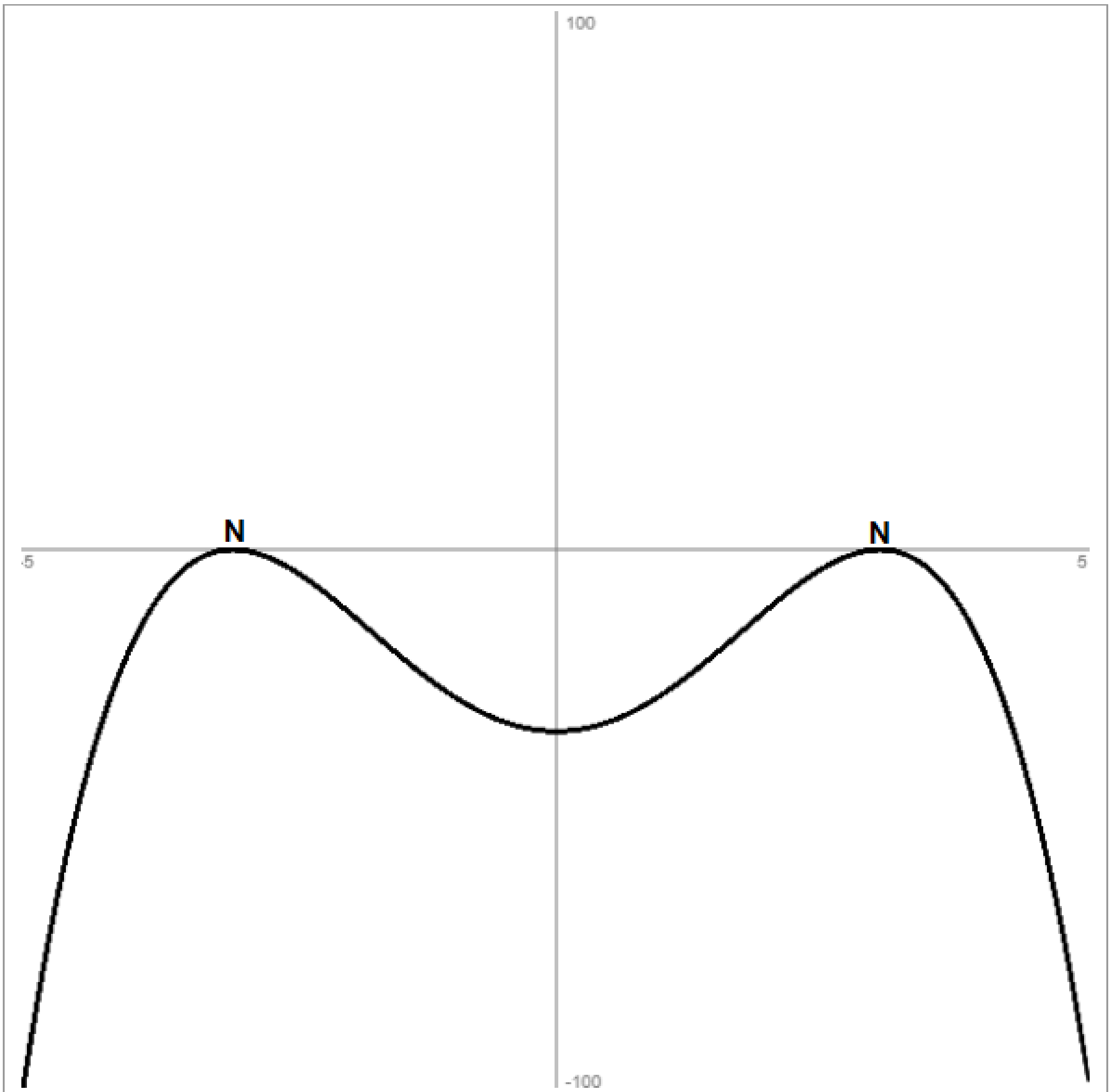
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞. Zusätzlich ist hier auf die Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems oder die Achsensymmetrie zur y-Achse des Koordinatensystems zu achten.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	0	-30	Doppelte Nullstelle N(-3|0) = Hochpunkt H(-3|0)
-1.74	-14.8623	-17.32	-0.14	Wendepunkt W(-1.74|-14.86)
0	-33.75	0	15	Schnittpunkt S_y(0|-33.75) = Tiefpunkt T(0|-33.75)
1.73	-15.0355	17.32	0.04	Wendepunkt W(1.73|-15.04)
3	0	0	-30	Doppelte Nullstelle N(3|0) = Hochpunkt H(3|0)

Graph:



f(-x) = f(x) => Achsensymmetrie zur y-Achse

x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 10: Skizziere die Funktion

$$f(x) = 0{,}2x^4 - x^3 - 4{,}8x^2$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

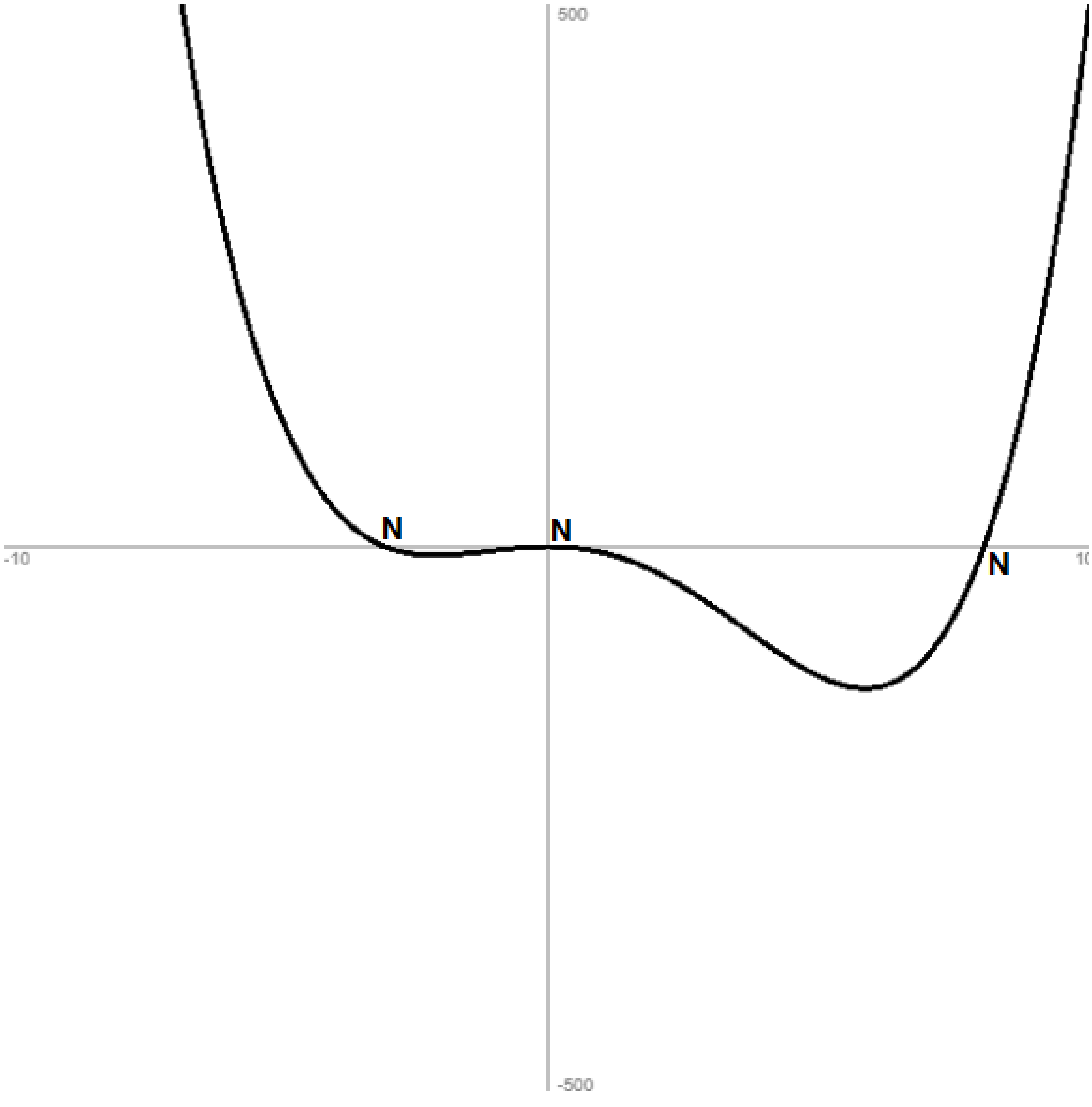
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	-20	30	-20	Nullstelle N(-3|0)
-2.06	-8.0259	0.0258	12.9764	-15.8976	Tiefpunkt T(-2.06|-8.03)
-1.1	-4.2311	5.8656	-0.0056	-11.3184	Wendepunkt W(-1.11|-4.23)
0	0	0	-9.6	-6	Doppelte Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
3.61	-75.6328	-36.1156	0.017	11.328	Wendepunkt W(3.61|-75.63)
5.81	-130.258	0.0004	36.6422	21.9072	Tiefpunkt T(5.81|-130.26)
8	0	140.8	96	32.4	Nullstelle N(8|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 11: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4}{20}$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

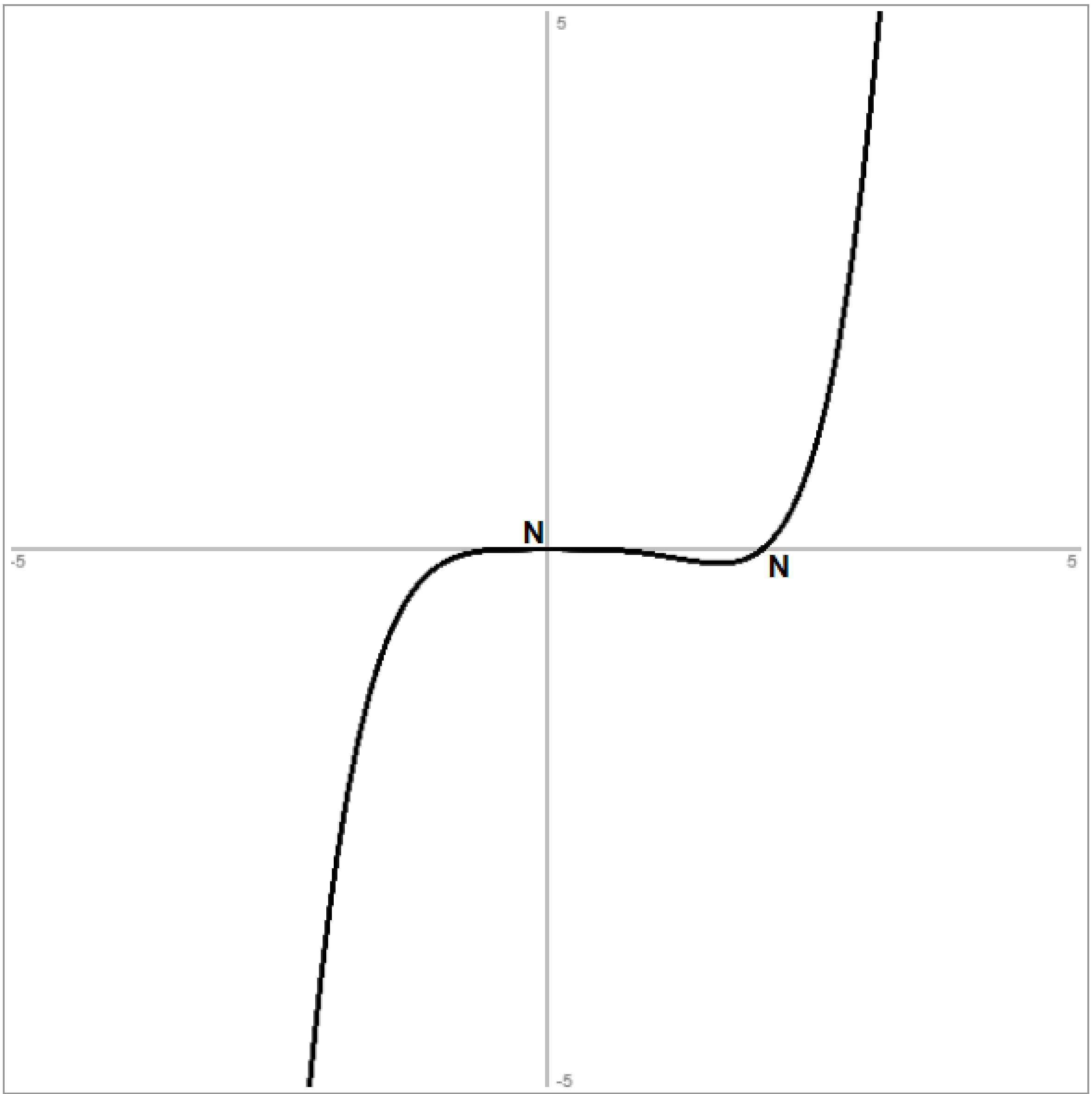
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	0	Vierfache Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1.21	-0.0847	-0.1727	0.0146	1.4883	Wendepunkt W(1.21|-0.08)
1.6	-0.1311	0	1.024	3.84	Tiefpunkt T(1.6|-0.13)
2	0	0.8	3.2	7.2	Nullstelle N(2|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 12: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 x^2 (x-4)$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

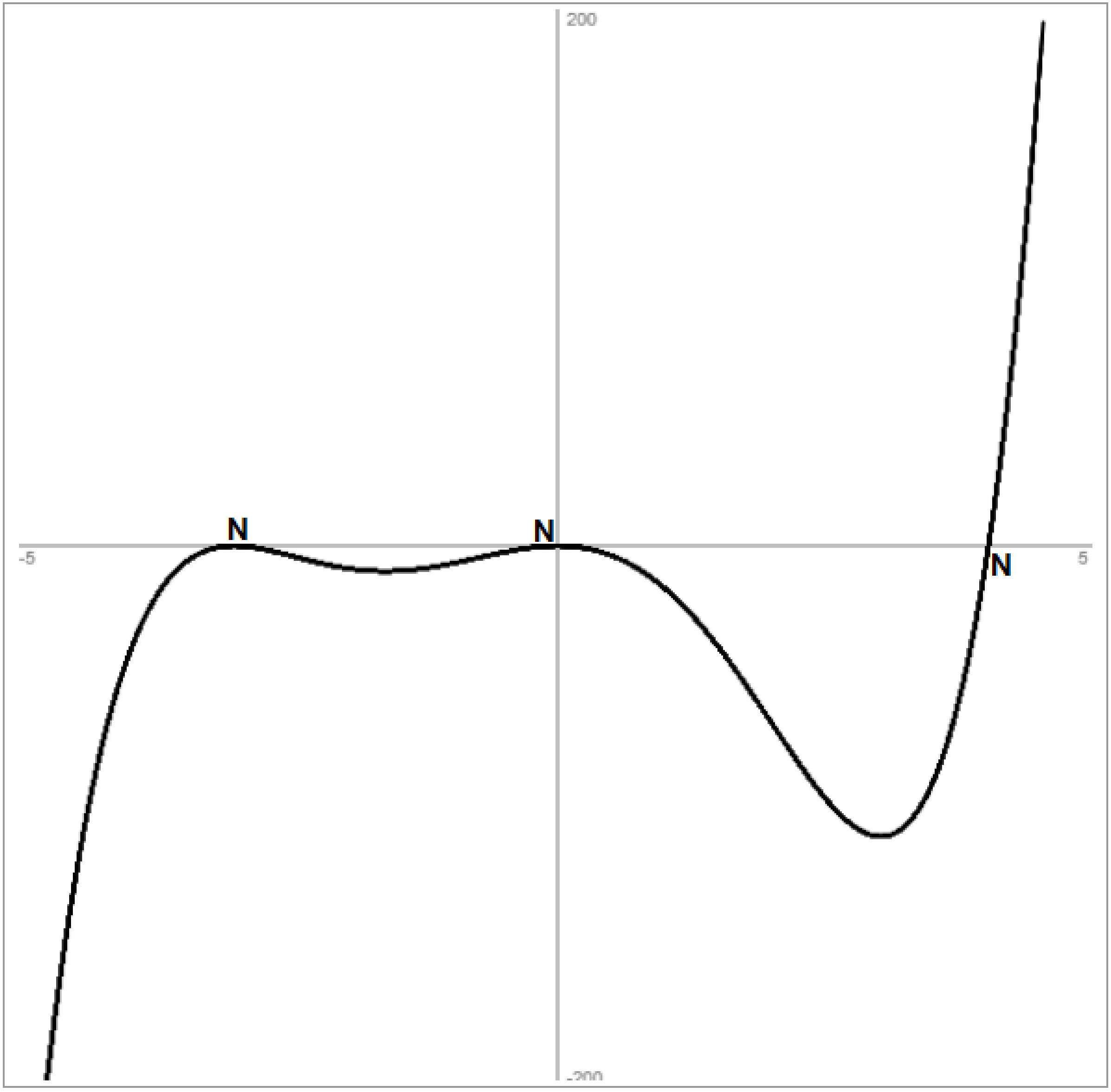
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	0	-42	Doppelte Nullstelle N(-3|0) = Hochpunkt H(-3|0)
-2.44	-4.0079	-10.41	-0.02	Wendepunkt W(-2.44|-4.01)
-1.6	-9.3662	0	17.17	Tiefpunkt T(-1.6|-9.37)
-0.75	-4.5088	8.96	0.19	Wendepunkt W(-0.75|-4.51)
0	0	0	-24	Doppelte Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1.98	-65.4665	-60.01	-0.29	Wendepunkt W(1.98|-65.47)
3	-108	0	136	Tiefpunkt T(3|--108)
4	0	261.34	410.67	Nullstelle N(4|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 13: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{10} x^3 (x-1)(x-3)^2$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

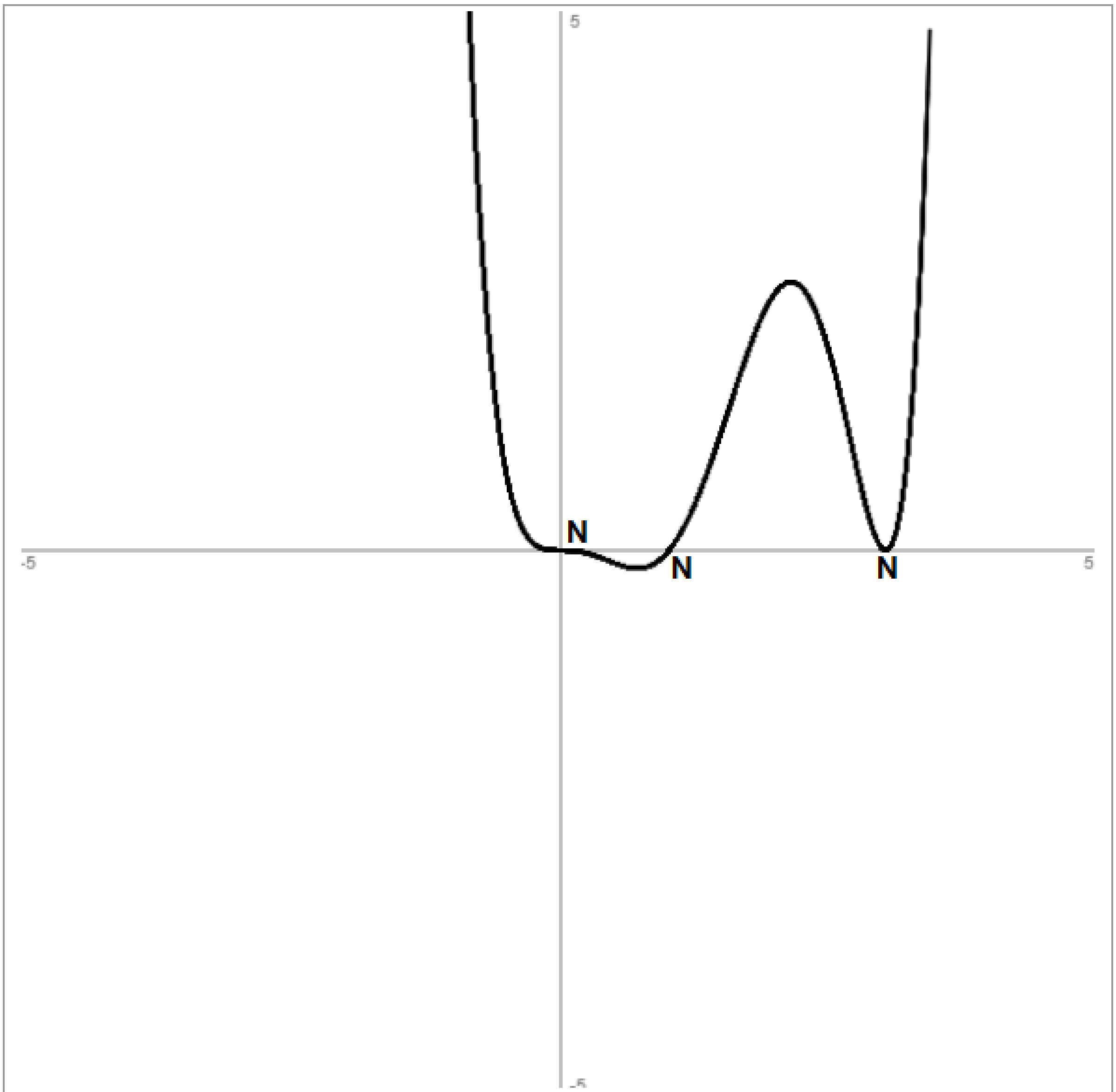
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	Dreifache Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
0.43	-0.0898	-0.4	-0.01	Wendepunkt W(0.43|-0.09)
0.7	-0.1633	-0.01	2.87	Tiefpunkt T(0.7|-0.16)
1	0	1.2	4.8	Nullstelle N(1|0)
1.55	1.2919	3.07	0.17	Wendepunkt W(1.55|1.29)
2.12	2.4792	0.09	-10.03	Hochpunkt H(2.12|2.48)
2.67	1.0385	-4.5	-0.34	Wendepunkt W(2.67|1.04)
3	0	0	31	Doppelte Nullstelle N(3|0) = Tiefpunkt T(3|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Aufgabe 14: Skizziere die Funktion

$$f(x) = -\frac{9}{20}x^2(x^2-4)(x+6)^2$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

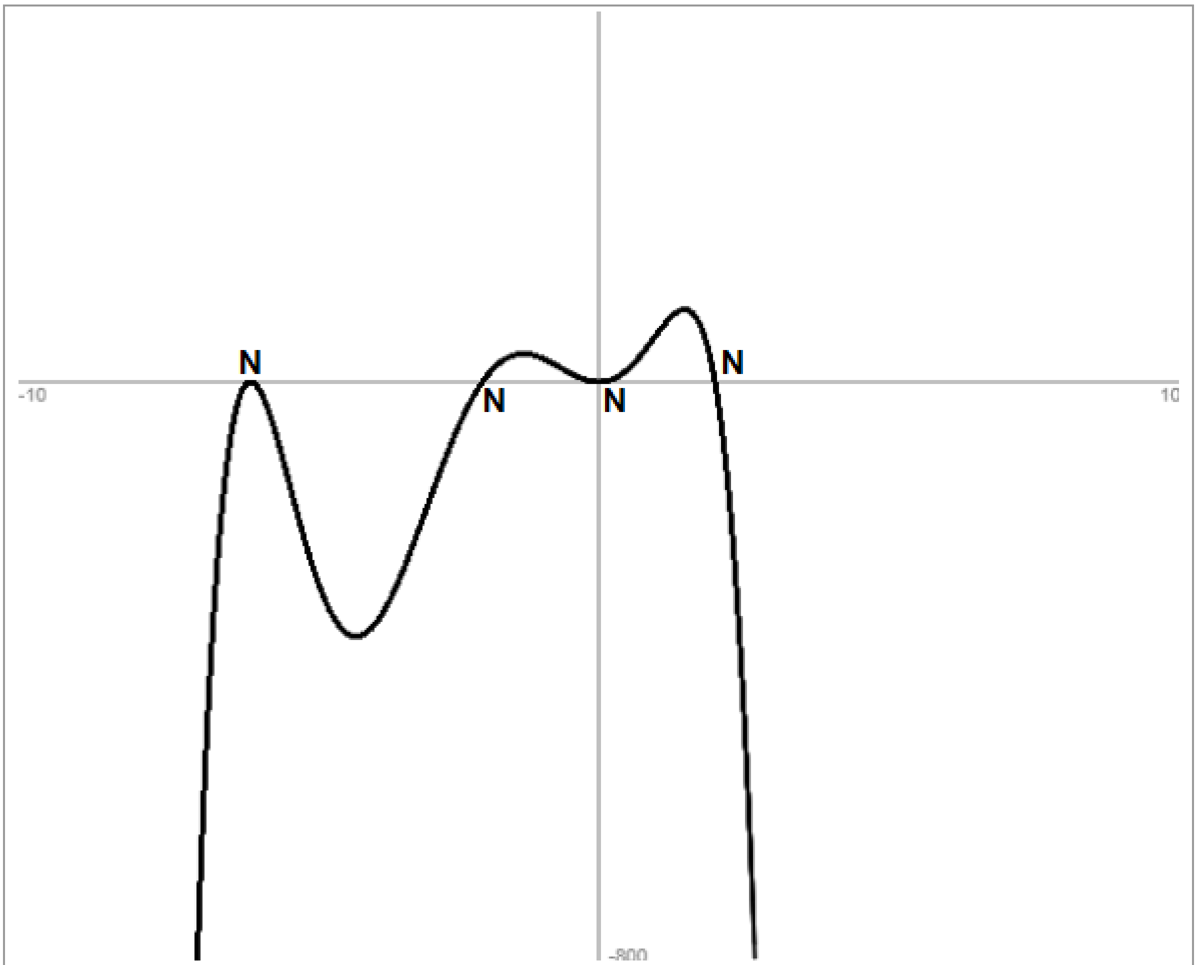
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-6	0	0.04	-1036.8	Doppelte Nullstelle N(-6|0) = Hochpunkt H(-6|0)
-5.32	-143.121	-304.46	-2.96	Wendepunkt W(-5.32|-143.12)
-4.19	-350.859	-3.33	336.44	Tiefpunkt T(-4.19|-350.86)
-2.98	-177.875	218.8	2.3	Wendepunkt W(-2.98|-177.87)
-2	0	115.2	-172.8	Nullstelle N(-2|0)
-1.3	38.8067	0.49	-132.19	Hochpunkt H(-1.3|38.81)
-0.65	19.4682	-45.55	-0.4	Wendepunkt W(-0.65|19.47)
0	0	0	129.6	Doppelte Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
0.93	58.5998	108.16	3.69	Wendepunkt W(0.93|58.6)
1.47	99.7915	2.94	-459.41	Hochpunkt H(1.47|99.79)
2	0	-460.84	-1382.4	Nullstelle N(2|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> -∞; x->+∞ => f(x) -> -∞

Aufgabe 15: Skizziere die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{250}x^3(0{,}5x^2 - 8)(2x+5)(x-8)^2$$

unter Berechnung der Nullstellen und Ermittlung des Verhaltens für betragsmäßig große x.

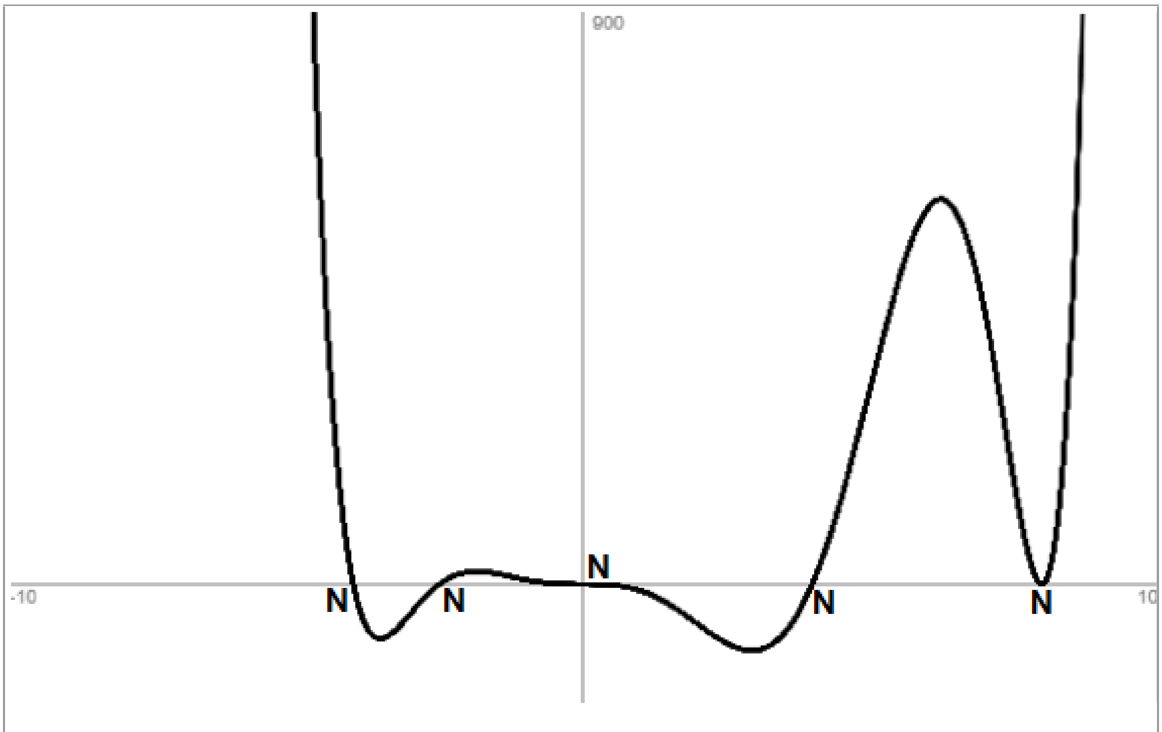
Vorgehensweise: Gemäß der oben dargestellten Vorgehensweise ist die Gleichung: f(x) = 0 zur Ermittlung der Nullstellen aufzulösen. Zu beachten ist ferner das Verhalten der Funktion f(x) für x->-∞ bzw. x->∞ mit: f(x) -> -∞ oder: f(x) -> ∞.

Lösung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	-442.42	1511.46	Nullstelle N(-4|0)
-3.53	-85.2654	-0.08	489.7	Tiefpunkt T(-3.53|-85.27)
-3.01	-46.8013	106.31	3.4	Wendepunkt W(-3.01|-46.8)
-2.5	0	67.18	-117.92	Nullstelle N(-2.5|0)
-1.85	20.0889	0.16	-70.5	Hochpunkt H(-1.85|20.09)
-1.25	12.0636	-19.82	-0.63	Wendepunkt W(-1.25|12.06)
0	0	0	0	Dreifache Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
1.99	-61.5513	-65.67	-0.02	Wendepunkt W(1.99|-61.55)
2.94	-104.1519	-1	142.65	Tiefpunkt T(2.94|-104.15)
4	0	212.99	225.28	Nullstelle N(4|0)
5.01	307.3277	357.77	0.51	Wendepunkt W(5.01|307.33)
6.24	603.5295	1.75	-570.1	Hochpunkt H(6.24|603.53)
7.36	245.8374	-548.3	-17.29	Wendepunkt W(7.36|245.84)
8	0	0	2014.99	Doppelte Nullstelle N(8|0) = Tiefpunkt T(8|0)

Graph:



x->-∞ => f(x) -> +∞; x->+∞ => f(x) -> +∞

Abkürzungen: N = Nullstelle.