Michael Buhlmann

Mathematik-Aufgabenpool
> Besondere Kurvenpunkte (Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte, Wende-, Sattelpunkte) bei ganz rationalen Funktionen II

Einleitung: Ganz rationale Funktionen f: **R** -> **R** besitzen den Funktionsterm: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ (für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n; $a_n \neq 0$). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Besondere Kurvenpunkte der Funktion f(x) sind Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte, Wendepunkte und Sattelpunkte. Sie lassen sich über die Gleichungen: f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) = 0 mit den Ableitungsfunktionen f'(x) und f''(x) ermitteln und bilden die Grundlage dessen, was Kurvendiskussion oder Funktionsuntersuchung genannt wird.

Besondere Kurvenpunkte (Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte, Wende-, Sattelpunkte)
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Besondere Kurvenpunkte (Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte, Wende-, Sattelpunkte)

Ganz rationale Gleichungen
Ganz rationale Gleichungen (Polynomgleichungen) sind nach der Variablen x aufzulösende Gleichungen mit ganz rationalen Termen und damit u.a. vom Typ: f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) = 0 mit ganz rationaler Funktion f(x):
I. Lineare Gleichung: ax+b = 0 ⇔ x = -b/a
II. Rein quadratische Gleichung: $ax^2+c = 0$ ⇔ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
III. Gemischt quadratische Gleichung: $x^2+px+q = 0$ ⇔ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Id. Gemischt quadratische Gleichung: $ax^2+bx+c = 0$ ⇔ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
IV. Ausklammern: $ax^n+…+bx^m = 0$ ⇔ $x^m(ax^{n-m}+…+b) = 0$ ⇔ x=0, $ax^{n-m}+…+b = 0$
V. Polynomdivison: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + … + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + … + b_1x + b_0) = 0$ mit x_0 als Lösung der Gleichung: f(x) = 0 (Ermittlung von x_0 u.a. als Teiler von a_0 bei Ganzzahligkeit von Lösungen)
VI. Substitution: $ax^4+bx^2+c = 0$, $z=x^2$ ⇔ $az^2+bz+c = 0$ ⇔ $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ⇔ $x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$ (falls z_1, $z_2 \geq 0$)
VII. Substitution: $ax^6+bx^3+c = 0$, $z=x^3$ ⇔ $az^2+bz+c = 0$ ⇔ $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ⇔ $x = \sqrt[3]{z_1}$, $x = \sqrt[3]{z_2}$
VIII. Satz vom Nullprodukt (auf der Grundlage einer existierenden Linearfaktorzerlegung eines ganz rationalen Terms): $a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x-x_m)^{k_m} = 0$ ⇔ $x=x_1$, $x=x_2$, … $x=x_m$ (für natürliche Zahlen k_1, k_2, … k_m, m)

Ganz rationale Gleichungen

Aufgabe 1: Untersuche die Funktion

$$f(x) = 4x - x^2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

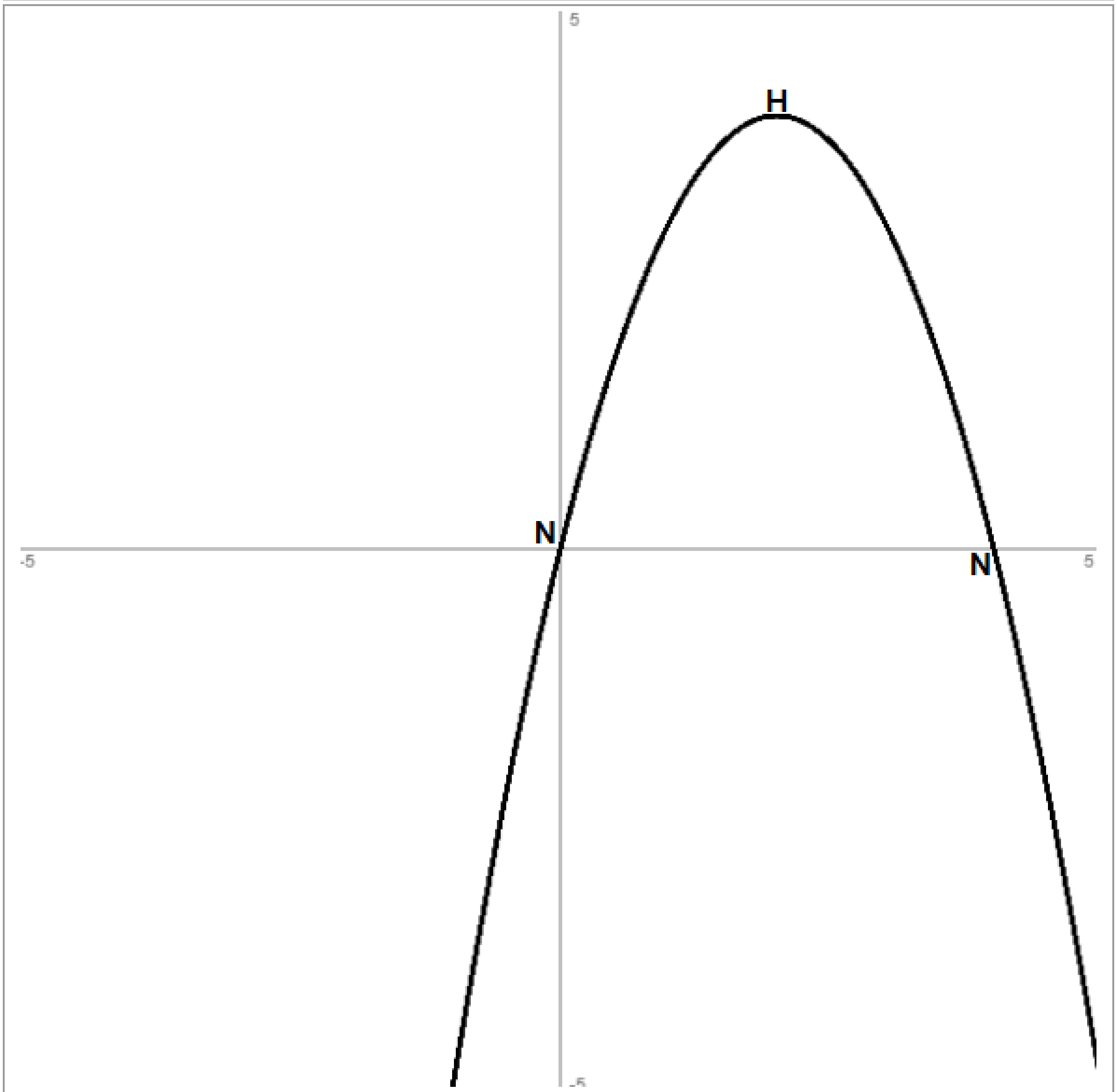
Ableitungen:

$f(x) = 4x–x^2$, $f'(x) = 4–2x$, $f''(x) = -2$, $f'''(x) = 0$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	4	-2	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
2	4	0	-2	0	Hochpunkt H(2|4)
4	0	-4	-2	0	Nullstelle N(4|0)

Graph:



Aufgabe 2: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

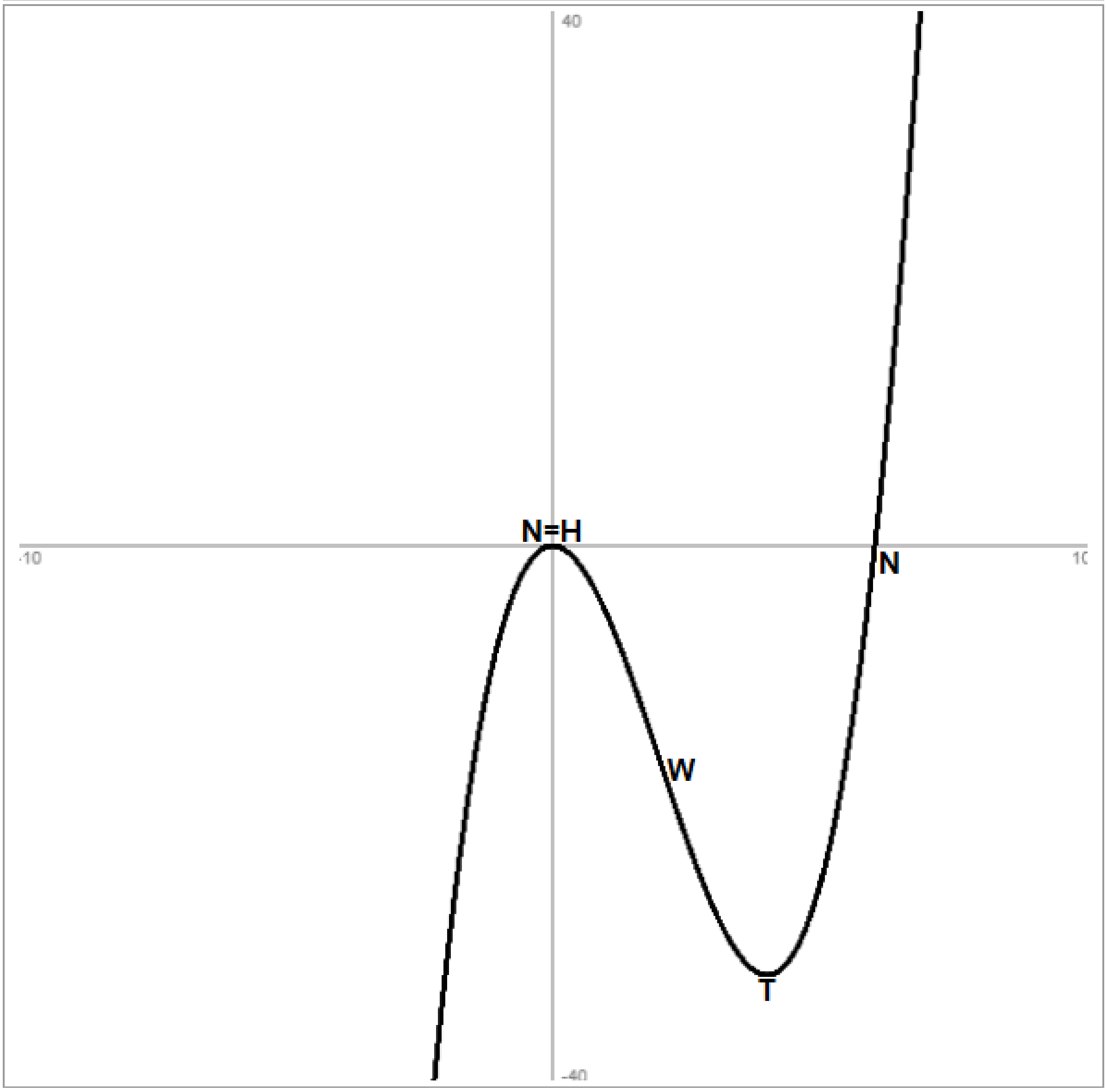
Lösung:

Ableitungen:
$f(x) = x^3–6x^2$, $f'(x) = 3x^2–12x$, $f''(x) = 6x–12$, $f'''(x) = 6$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	-12	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
2	-16	-12	0	6	Wendepunkt W(2|-16)
4	-32	0	12	6	Tiefpunkt T(4|-32)
6	0	36	24	6	Nullstelle N(6|0)

Graph:



Aufgabe 3: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

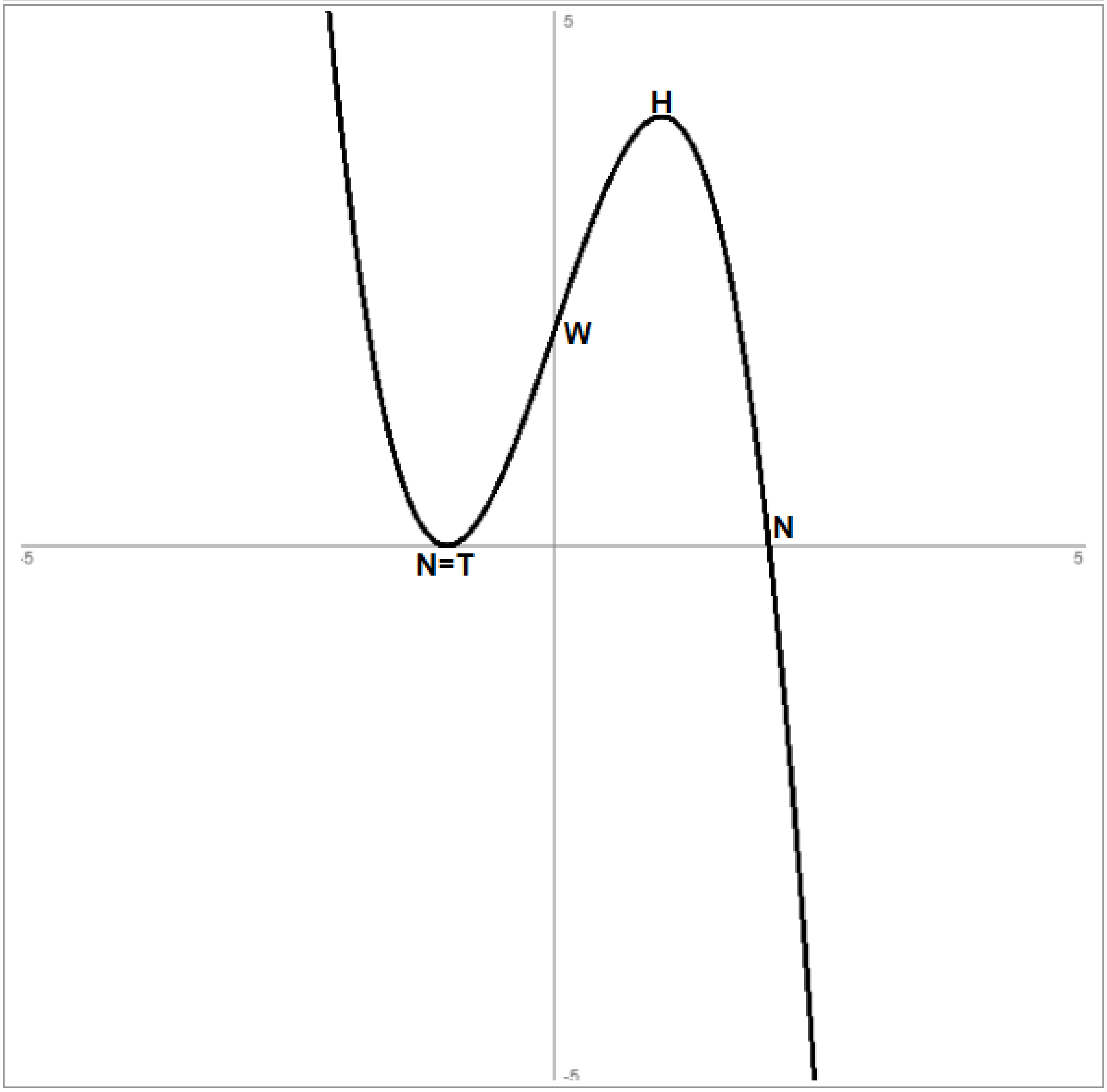
Ableitungen:

$f(x) = -x^3+3x+2$, $f'(x) = -3x^2+3$, $f''(x) = -6x$, $f'''(x) = -6$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1	0	0	6	-6	Nullstelle N(-1|0) = Tiefpunkt T(-1|0)
0	2	3	0	-6	Schnittpunkt S_y(0|2) = Wendepunkt W(0|2)
1	4	0	-6	-6	Hochpunkt H(1|4)
2	0	-9	-12	-6	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Aufgabe 4: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x+2)^2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

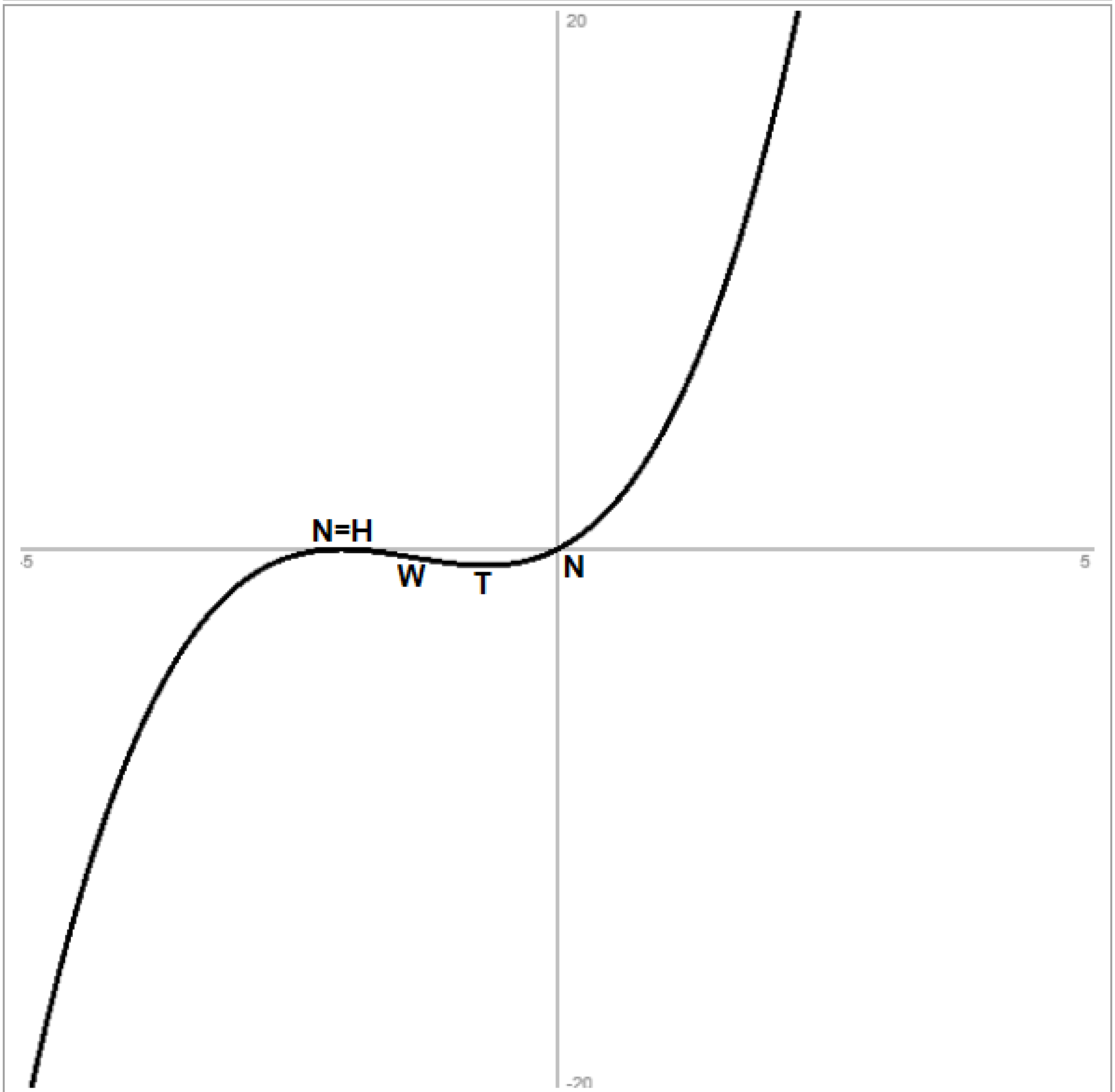
Ableitungen:

$f(x) = 0{,}5x^3+2x^2+2x$, $f'(x) = 1{,}5x^2+4x+2$, $f''(x) = 3x+4$, $f'''(x) = 3$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	0	-2	3	Nullstelle N(-2|0) = Hochpunkt H(-2|0)
-1.33	-0.2985	-0.6667	0.01	3	Wendepunkt W(-1.33|-0.3)
-0.66	-0.5925	0.0134	2.02	3	Tiefpunkt T(-0.66|-0.59)
0	0	2	4	3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)

Graph:



Aufgabe 5: Untersuche die Funktion

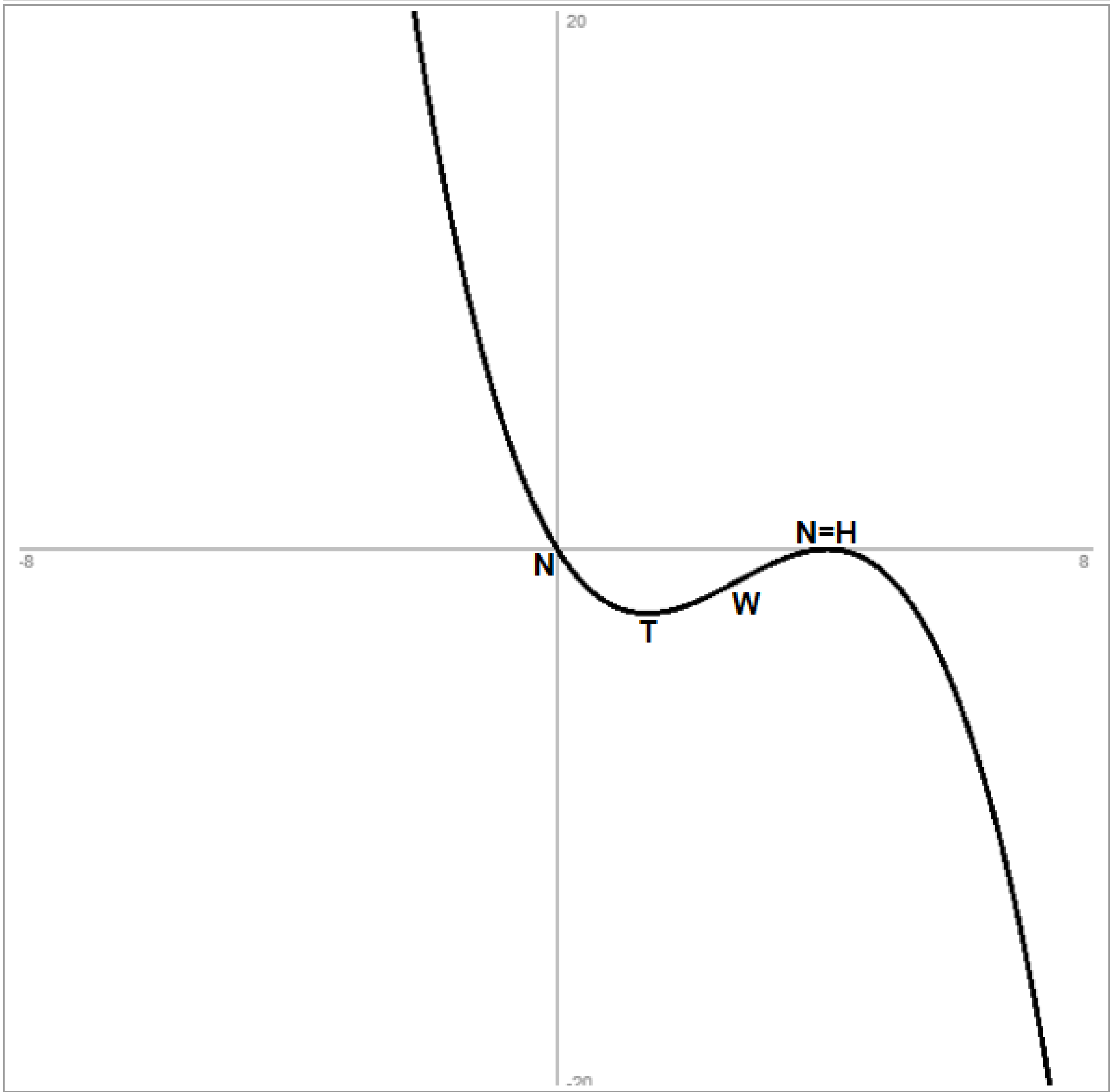
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - 4x$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

Ableitungen:					
$f(x) = -0{,}25x^3+2x^2-4x$, $f'(x) = -0{,}75x^2+4x-4$, $f''(x) = -1{,}5x+4$, $f'''(x) = -1{,}5$					
Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	-4	4	-1.5	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
1.34	-2.3703	0.0133	1.99	-1.5	Tiefpunkt T(1.34|-2.37)
2.67	-1.1807	1.3333	-0.005	-1.5	Wendepunkt W(2.67|-1.18)
4	0	0	-2	-1.5	Nullstelle N(4|0) = Hochpunkt H(4|0)
Graph:					



Aufgabe 6: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 8x$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

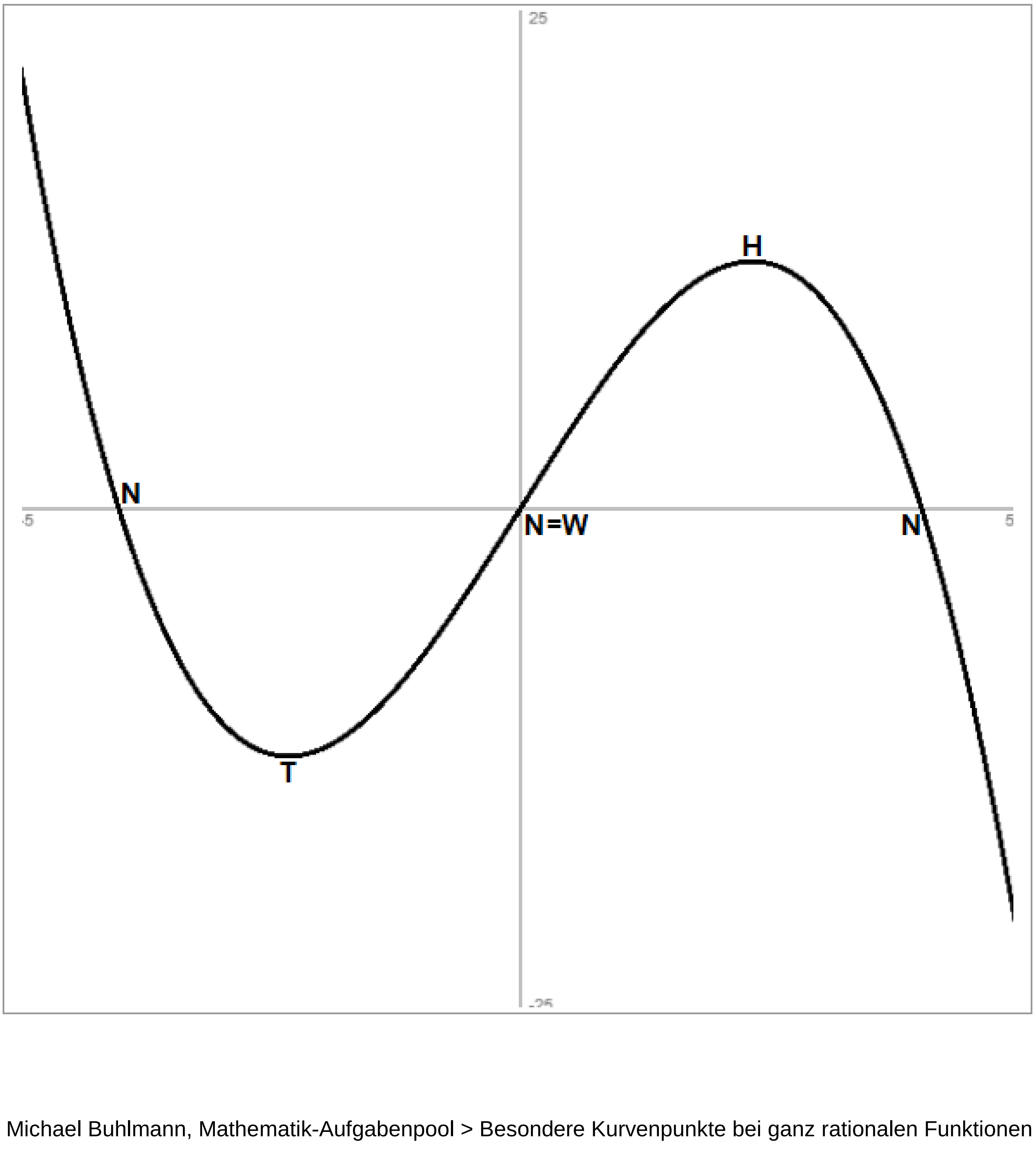
Ableitungen:

$f(x) = -0{,}5x^3+8x$, $f'(x) = -1{,}5x^2+8$, $f''(x) = -3x$, $f'''(x) = -3$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	-16	12	-3	Nullstelle N(-4|0)
-2.3	-12.3165	0.065	6.9	-3	Tiefpunkt T(-2.3|-12.32)
0	0	8	0	-3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
2.31	12.3168	-0.0041	-6.93	-3	Hochpunkt H(2.31|12.32)
4	0	-16	-12	-3	Nullstelle N(4|0)

Graph:



Aufgabe 7: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 + 2x$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

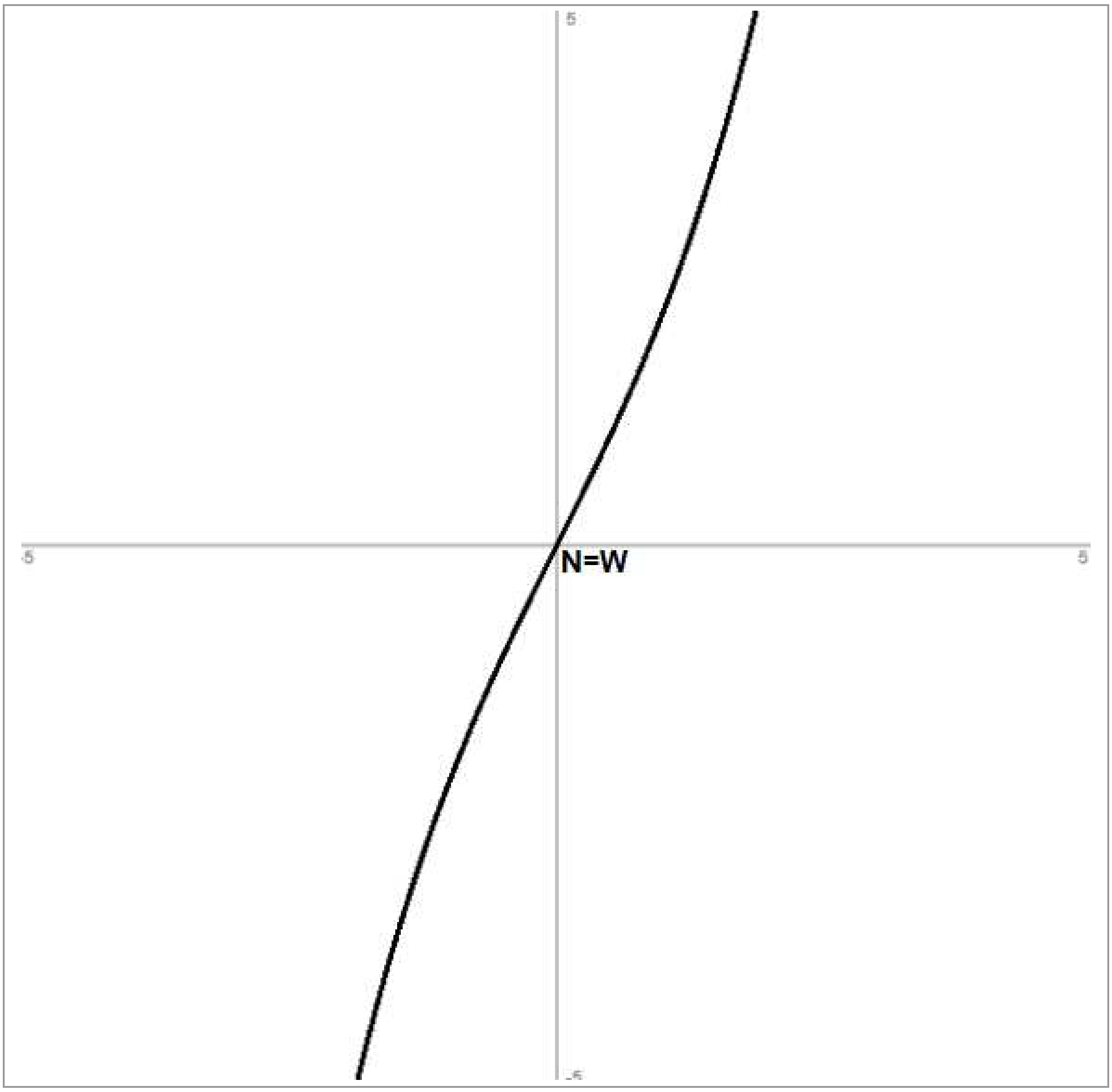
Ableitungen:

$f(x) = 0,2x^3+2x$, $f'(x) = 0,6x^2+2$, $f''(x) = 1,2x$, $f'''(x) = 1,2$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	2	0	1.2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)

Graph:



Aufgabe 8: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 3$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

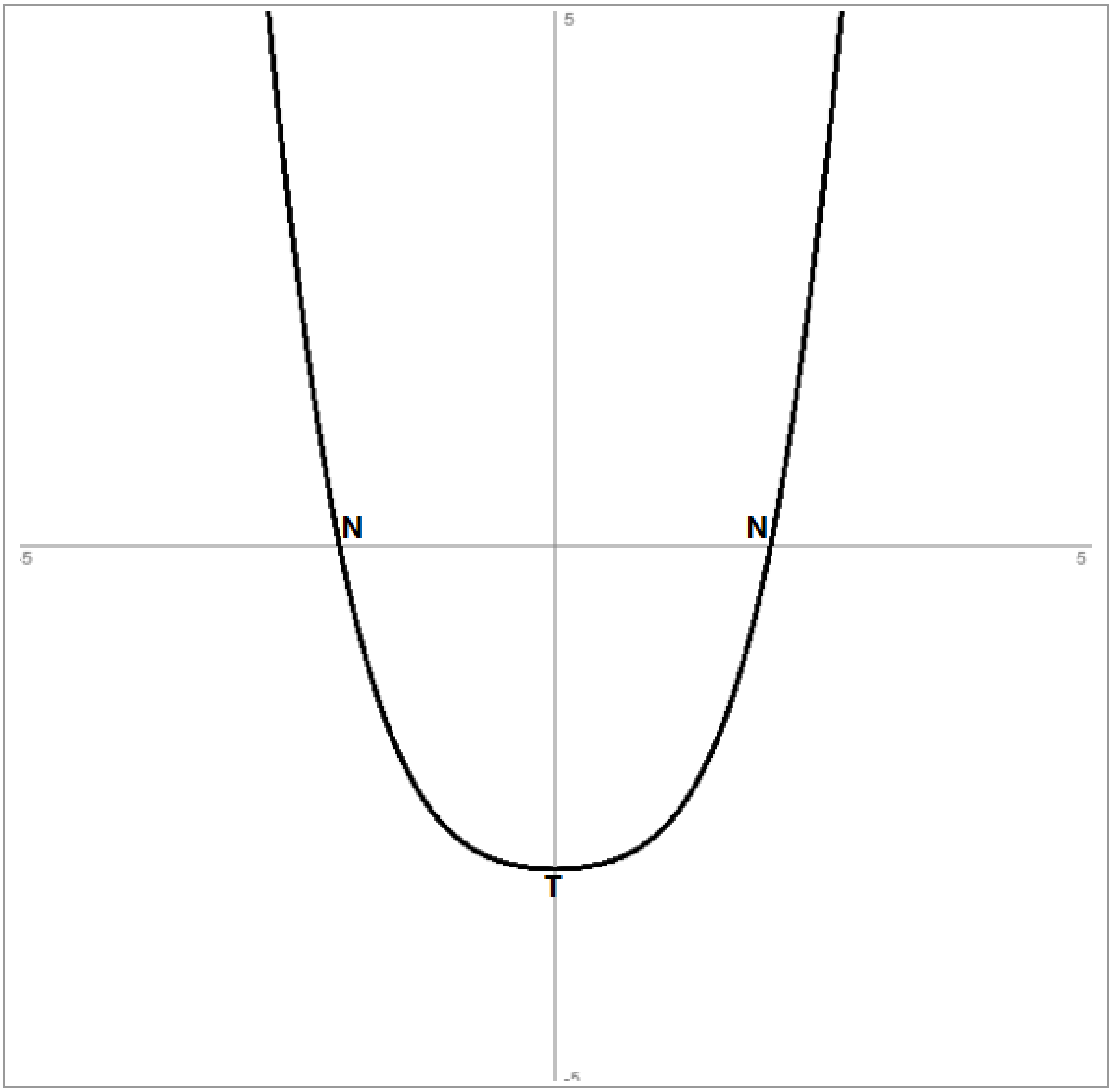
Ableitungen:

$f(x) = 0{,}125x^4+0{,}25x^2–3$, $f'(x) = 0{,}5x^3+0{,}5x$, $f''(x) = 1{,}5x^2+0{,}5$, $f'''(x) = 3x$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	-5	6.5	-6	Nullstelle N(-2|0)
0	-3	0	0.5	0	Schnittpunkt S_y(0|-3) = Tiefpunkt T(0|-3)
2	0	5	6.5	6	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Aufgabe 9: Untersuche die Funktion

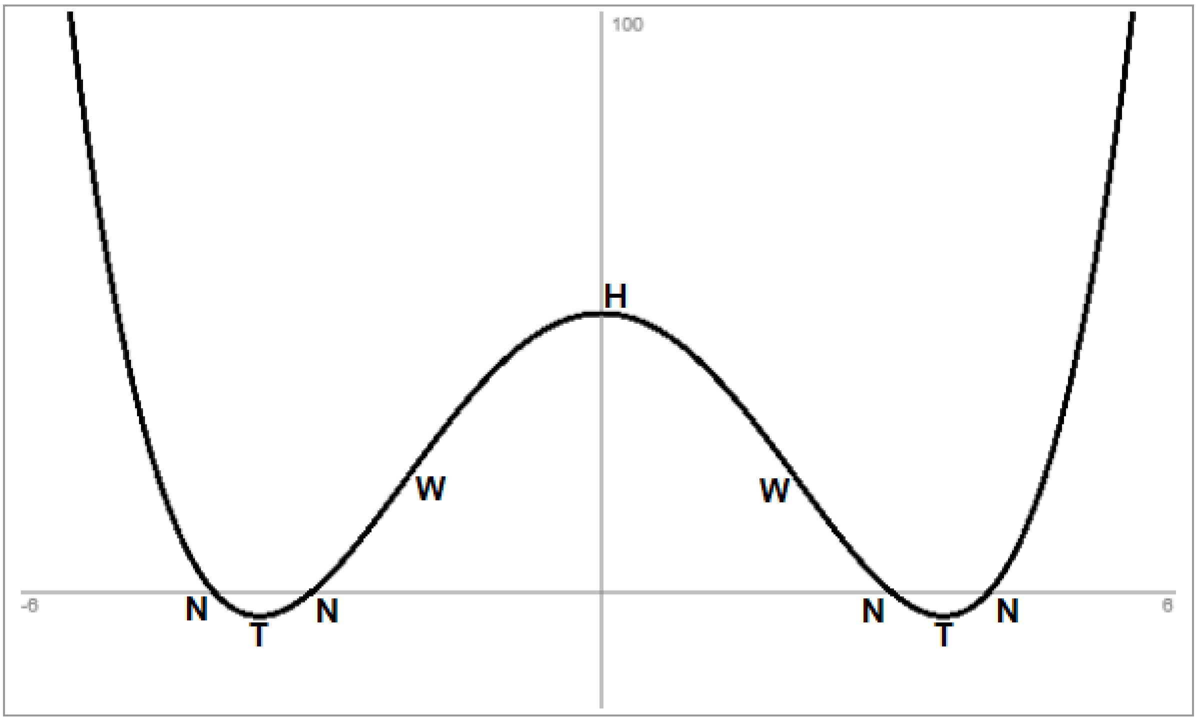
$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^4 - 25x^2 + 144\right)$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

Ableitungen:					
$f(x) = (x^4–25x^2+144)/3$, $f'(x) = (4x^3–50x)/3$, $f''(x) = (12x^2–50)/3$, $f'''(x) = 8x$					
Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	0	-18.6667	47.3333	-32	Nullstelle N(-4|0)
-3.53	-4.0828	0.184	33.1769	-28.24	Tiefpunkt T(-3.53|-4.08)
-3	0	14	19.3333	-24	Nullstelle N(-3|0)
-2.04	19.093	22.6804	-0.0203	-16.32	Wendepunkt W(-2.04|19.09)
0	48	0	-16.6667	0	Schnittpunkt S_y(0|48) = Hochpunkt H(0|48)
2.05	18.8662	-22.6798	0.1433	16.4	Wendepunkt W(2.05|18.87)
3	0	-14	19.3333	24	Nullstelle N(3|0)
3.54	-4.083	0.1492	33.4597	28.32	Tiefpunkt T(3.54|-4.08)
4	0	18.667	47.3333	32	Nullstelle N(4|0)
Graph:					



Aufgabe 10: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^4$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

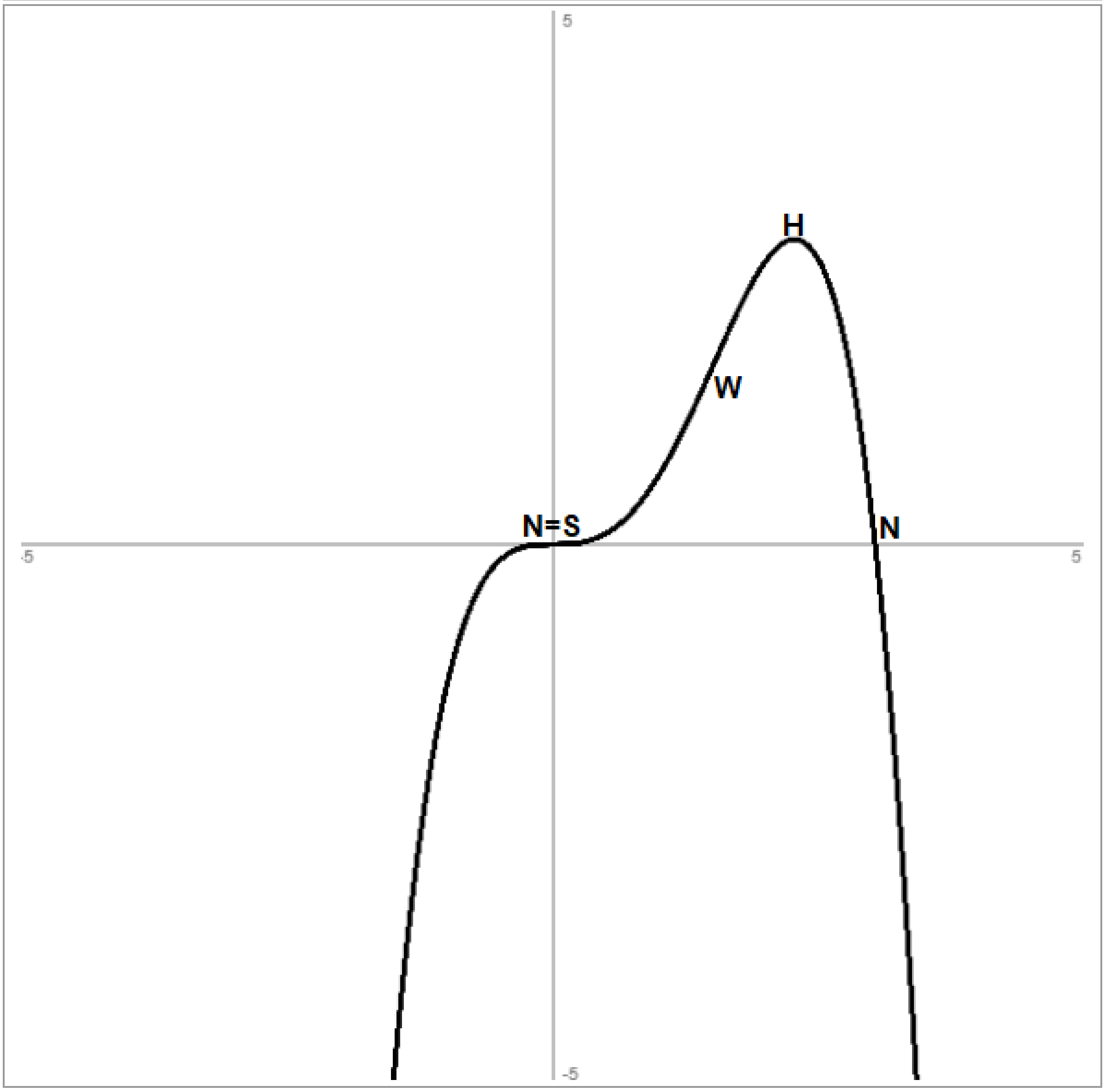
Ableitungen:

$f(x) = x^3–x^4/3$, $f'(x) = 3x^2–4x^3/3$, $f''(x) = 6x–4x^2$, $f'''(x) = 6–8x$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
1.5	1.6875	2.25	0	-6	Wendepunkt W(1.5|1.69)
2.25	2.8477	0	-6.75	-12	Hochpunkt H(2.25|2.85)
3	0	-9	-18	-18	Nullstelle N(3|0)

Graph:



Aufgabe 11: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 9x^2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

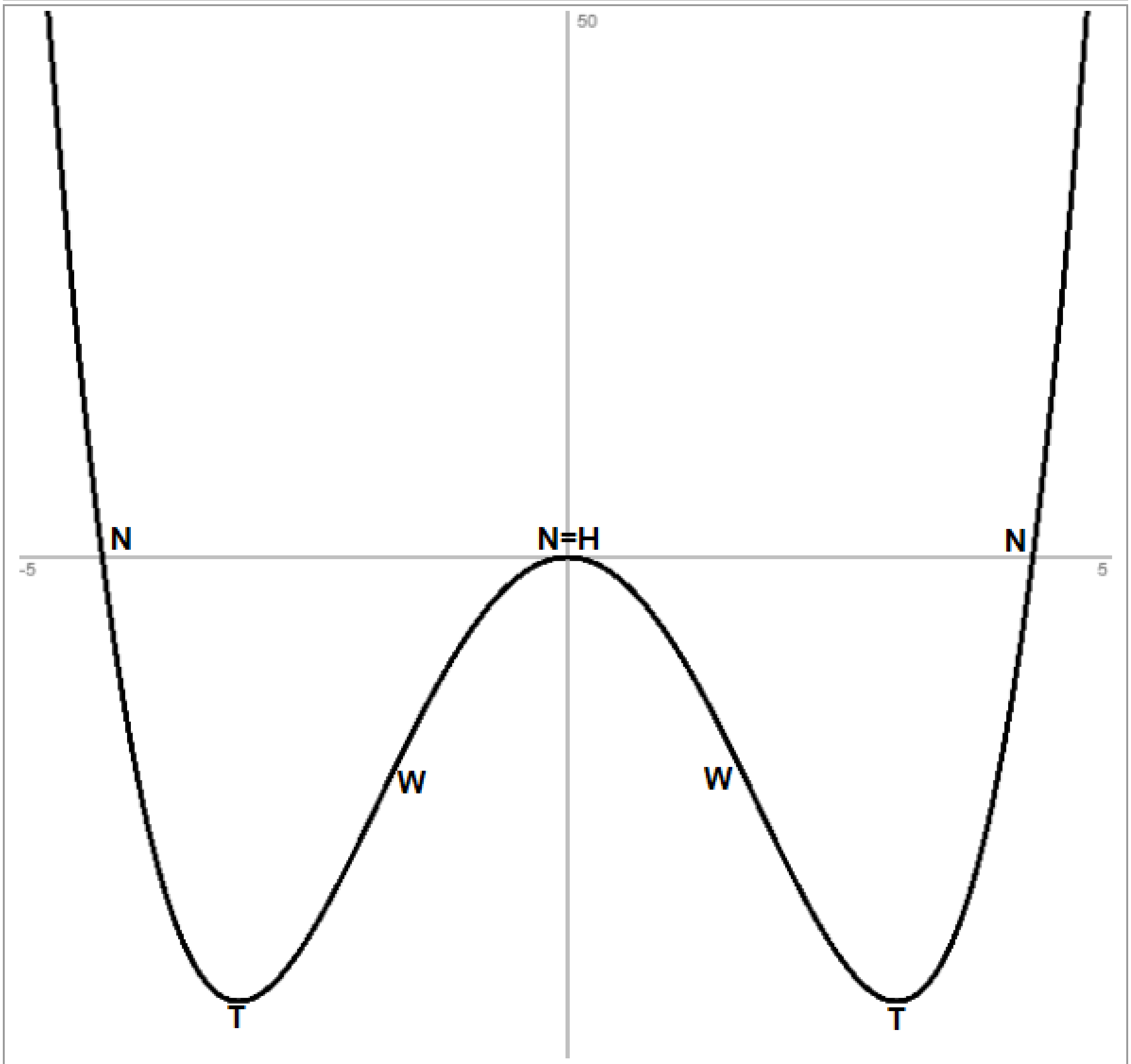
Ableitungen:

$f(x) = 0{,}5x^4–9x^2$, $f'(x) = 2x^3–18x$, $f''(x) = 6x^2–18$, $f'''(x) = 12x$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4.24	0	-76.13	89.8656	-50.88	Nullstelle N(-4.24|0)
-3	-40.5	0	36	-36	Tiefpunkt T(-3|-40.5)
-1.73	-22.4574	20.7846	-0.0426	-20.76	Wendepunkt W(-1.73|-22.46)
0	0	0	-18	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1.74	-22.6652	-20.784	0.1656	20.88	Wendepunkt W(1.74|-22.67)
3	-40.5	0	36	36	Tiefpunkt T(3|-40.5)
4.24	0	76. 13	89.8656	51	Nullstelle N(4.24|0)

Graph:



Aufgabe 12: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{x^2}{5}(x+4)^2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

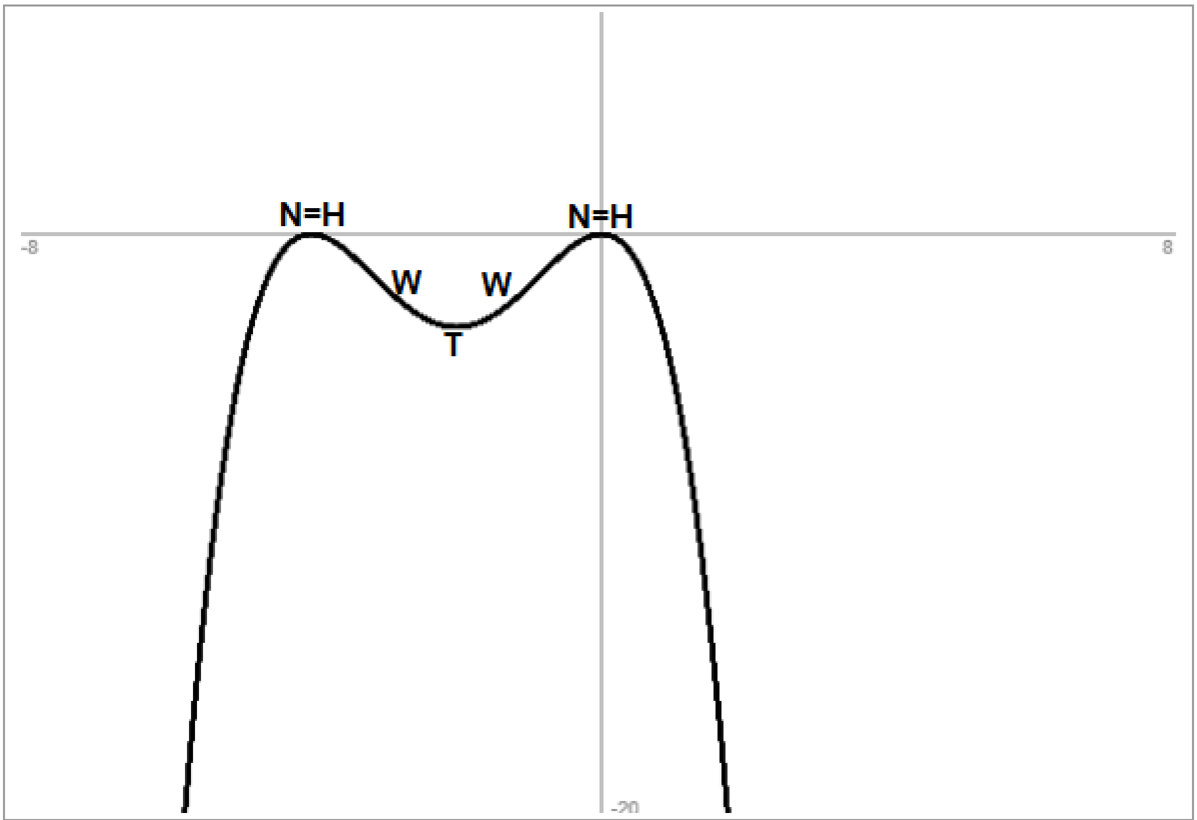
Lösung:

Ableitungen:
$f(x) = -(x^4+8x^3+16x^2)/5$, $f'(x) = -(4x^3+24x^2+32x)/5$, $f''(x) = -(12x^2+48x+32)/5$, $f'''(x) = -(24x+48)/5$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-4	0	0	-6.4	9.6	Nullstelle N(-4|0) = Hochpunkt H(-4|0)
-3.15	-1.4338	-2.4633	0.026	5.52	Wendepunkt W(-3.15|-1.43)
-2	-3.2	0	3.1998	-0.048	Tiefpunkt T(-2|-3.2)
-0.85	-1.4338	2.4633	-0.026	-5.568	Wendepunkt W(-0.85|-1.43)
0	0	0	-6.4	-9.6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)

Graph:



Aufgabe 13: Untersuche die Funktion

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 12x^2$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

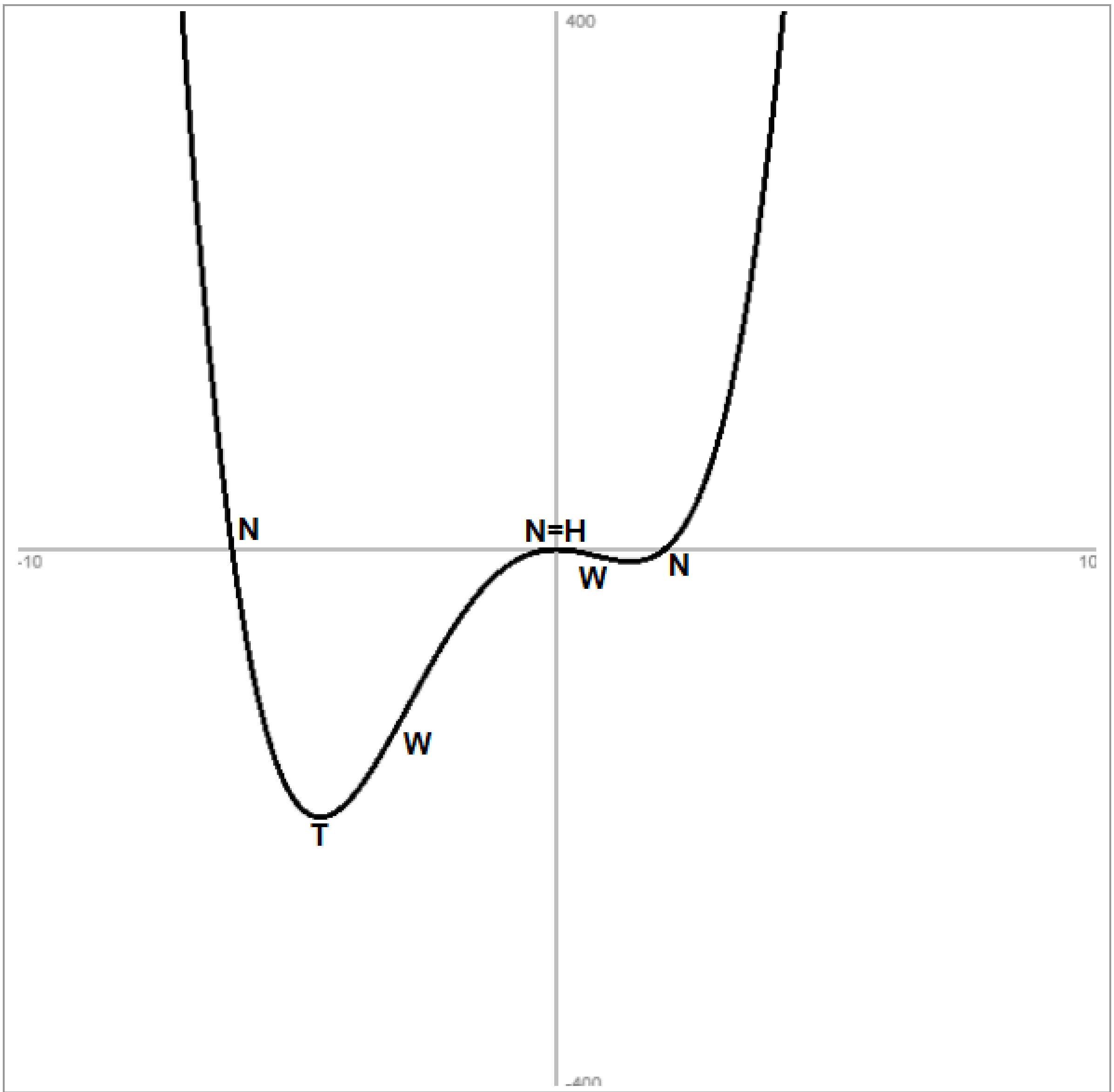
Lösung:

Ableitungen:
$f(x) = x^4+4x^3–12x^2$, $f'(x) = 4x^3+12x^2-24x$, $f''(x) = 12x^2+24x-24$, $f'''(x) = 24x+24$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-6	0	-288	264	-120	Nullstelle N(-6|0)
-4.37	-198.285	0.229	100.2828	-80.88	Tiefpunkt T(-4.37|-198.29)
-2.73	-115.2747	73.5691	-0.0852	-41.52	Wendepunkt W(-2.73|-115.27)
0	0	0	-24	24	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
0.74	-4.6504	-9.5679	0.3312	41.76	Wendepunkt W(0.74|-4.65)
1.38	-8.7138	0.2451	31.9728	57.12	Tiefpunkt T(1.38|-8.71)
2	0	32	72	72	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Aufgabe 14: Untersuche die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

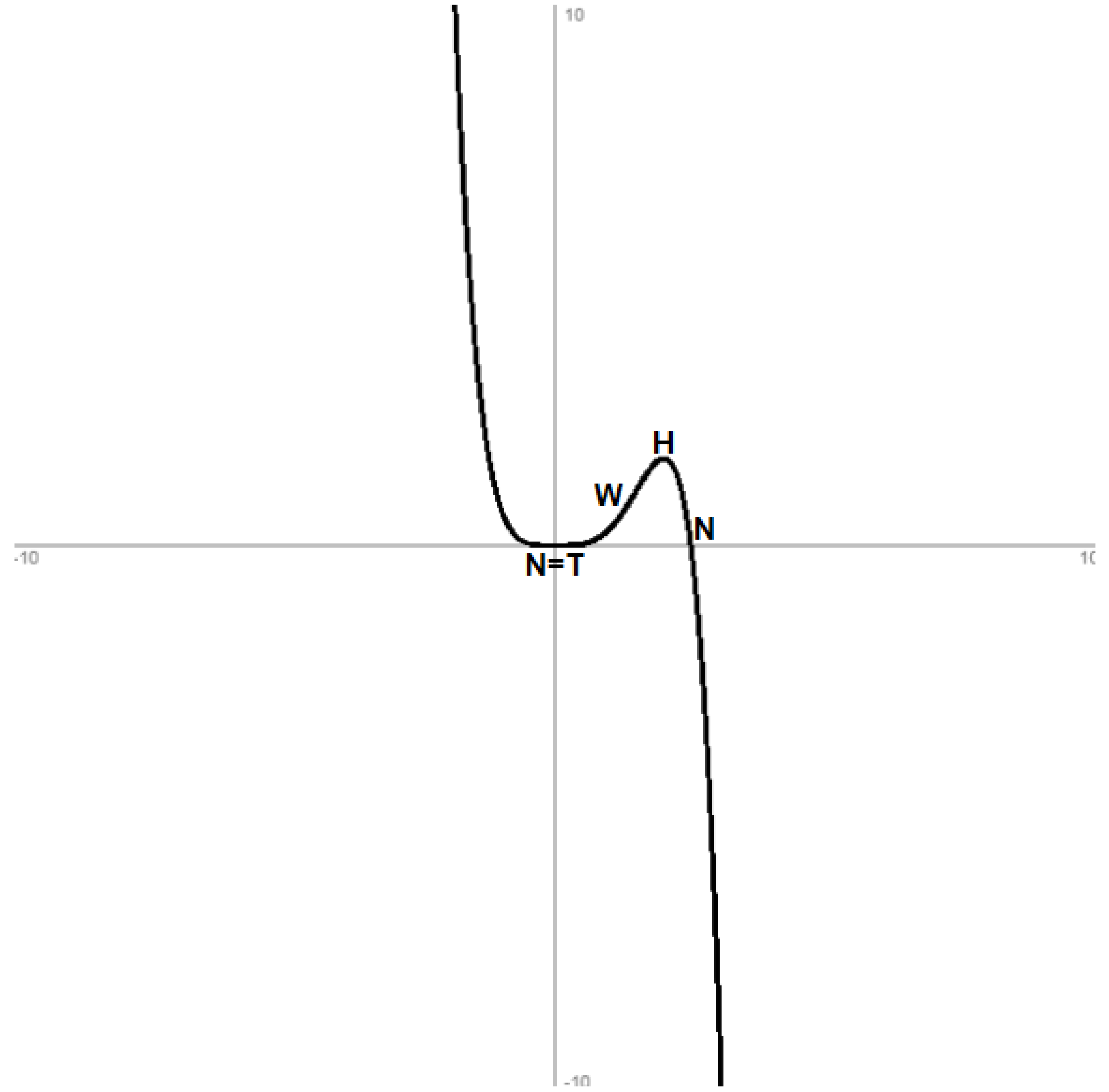
Ableitungen:

$f(x) = -0{,}2x^5+0{,}5x^4$, $f'(x) = -x^4+2x^3$, $f''(x) = -4x^3+6x^2$, $f'''(x) = -12x^2+12x$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
1.5	1.0125	1.6875	0	-9	Wendepunkt W(1.5|1.01)
2	1.6	0	-8	-24	Hochpunkt H(2|1.6)
2.5	0	-7.8125	-25	-45	Nullstelle N(2.5|0)

Graph:



Aufgabe 15: Untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{2}x^3$$

auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen.

Vorgehensweise: Es sind die ersten drei Ableitungen zu bilden und danach die folgenden ganz rationalen Gleichungen aufzulösen: f(x) = 0 -> Nullstellen; f'(x) = 0 -> Hoch-/Tiefpunkte; f''(x) = 0 -> Wendepunkte. Bei Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkten ist deren Existenz mit der nächsthöheren Ableitung nachzuweisen.

Lösung:

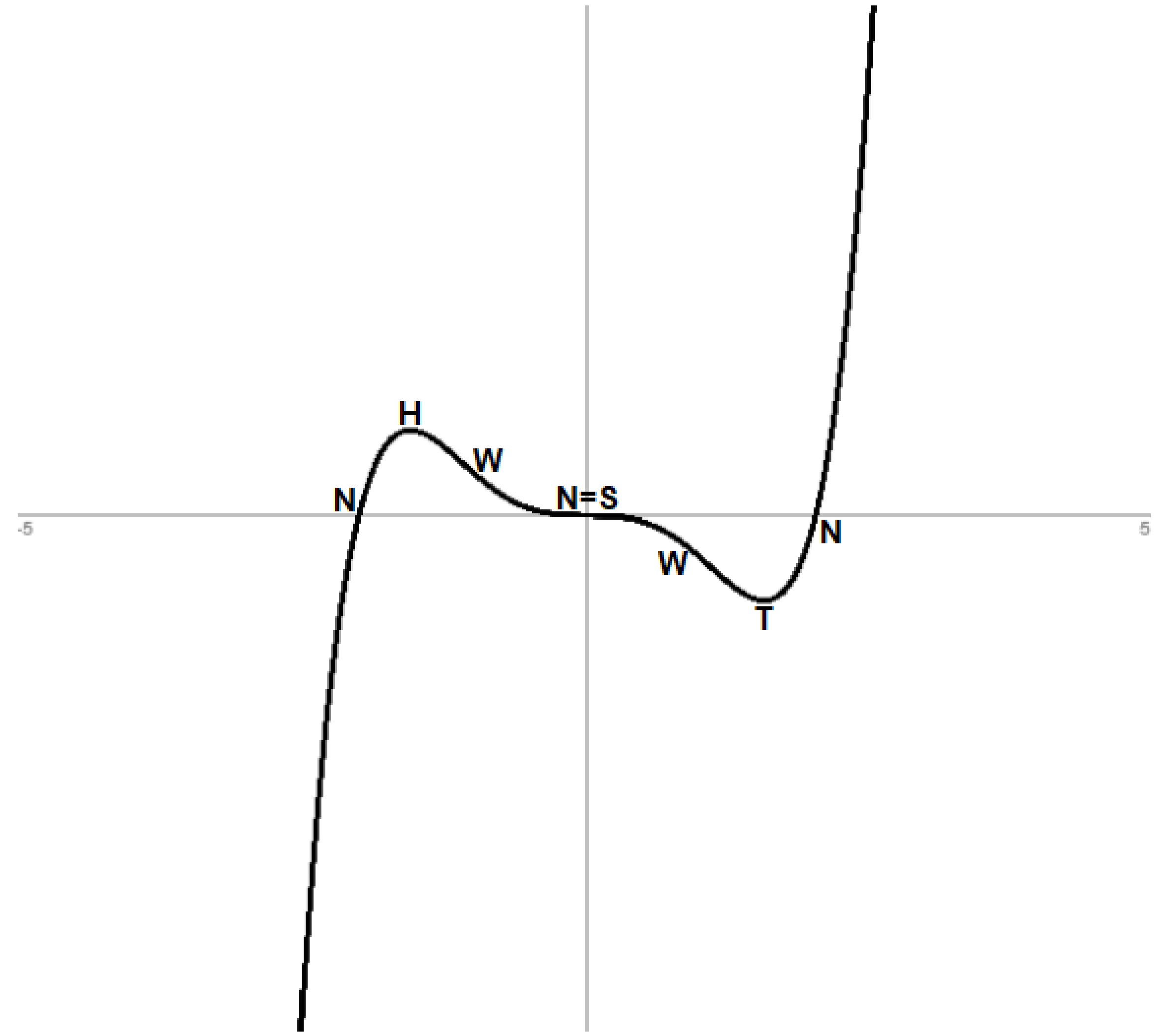
Ableitungen:

$f(x) = 0{,}125x^5–0{,}5x^3$, $f'(x) = 0{,}625x^4–1{,}5x^2$, $f''(x) = 1{,}875x^3–3x$, $f'''(x) = 5{,}625x^2–3$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	4	-14	27	Nullstelle N(-2|0)
-1.54	0.7434	-0.0421	-4.5107	14.787	Hochpunkt H(-1.54|0.74)
-1.09	0.4552	-0.8999	0.0324	5.9108	Wendepunkt W(-1.09|0.46)
0	0	0	0	-3	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
1.1	-0.4642	-0.8999	0.0275	6.075	Wendepunkt W(1.1|-0.46)
1.55	-0.7436	0.0038	4.6597	15.0188	Tiefpunkt T(1.55|-0.74)
2	0	4	14	27	Nullstelle N(2|0)

Graph:



Abkürzungen: H = Hochpunkt, N = Nullstelle, S = Sattelpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt.